

Векторные расслоения

1. Пусть η — нетривиальное одномерное расслоение на S^1 . Тривиальны ли расслоения (а) $\eta \oplus \dots \oplus \eta$ (n раз)? (б) $\eta \otimes \dots \otimes \eta$ (n раз)?
2. Докажите, что касательное и кокасательное расслоения к S^2 изоморфны. Можно ли распространить эту теорему на произвольные многообразия?
3. Пусть N — линейное расслоение с базой S^n , слой которого над точкой a — прямая, нормальная к $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в точке a (уточните структуру расслоения!). (а) Докажите, что N — тривиальное расслоение. (б) Докажите, что $TS^n \oplus N$ — тривиальное расслоение.
4. (а) Докажите, что каждое линейное расслоение на S^2 тривиально. (б) Докажите, что расслоение TS^2 нельзя разложить в сумму подрасслоений. (в) Перечислите (с точностью до эквивалентности) линейные расслоения с базой $\mathbb{R}P^2$. (г) Докажите, что для любого такого расслоения ν сумма $T\mathbb{R}P^2 \oplus \nu$ не будет тривиальным расслоением. Выведите отсюда, что в \mathbb{R}^3 подмногообразия диффеоморфного $\mathbb{R}P^2$.
5. (а) Слоем тавтологического расслоения над точкой $a \in \mathbb{C}P^1$ является a (прямая в \mathbb{C}^2). Докажите, что тензорный квадрат тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^1$ — касательное расслоение к $\mathbb{C}P^1$. (б) Разложите тензорный квадрат расслоения TS^2 на подрасслоения.