

## Подмногообразия

1. Докажите, что если два подмногообразия пересекаются трансверсально, то их пересечение является подмногообразием.

2. Докажите или опровергните следующие утверждения: (а) если  $f : N \rightarrow M$  — гладкое вложение, а образ  $F(N) \subset M$  локально замкнут, то он является подмногообразием и диффеоморфен  $N$ ; (б) если  $f : N \rightarrow M$  — гладкое вложение, а  $N$  компактно, то образ  $f(N) \subset M$  — подмногообразие, диффеоморфное  $N$ .

3. Пусть  $M$  — многообразие размерности  $m$ ,  $N \subset M$  — подмножество (с индуцированной топологией), на котором имеется структура  $n$ -мерного многообразия ( $n \leq m$ ) такая, что отображение вложения  $i : N \rightarrow M$  (при которой каждой точке  $N$  сопоставляется она сама, но как точка  $M$ ) является погружением. Обязательно ли  $N$  — подмногообразие? Может ли на одном и том же подмножестве  $N \subset M$  существовать две различных структуры  $n$ -мерного многообразия с этим свойством?

4. (а) Докажите, что  $SO(n)$  — гладкое подмногообразие в  $\text{Mat}(n \times n) = \mathbb{R}^{n^2}$ . Какова его размерность?

(б) Докажите, что  $T_e SO(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  — это множество  $so(n)$  кососимметрических матриц  $n \times n$  с нулевым следом.

(в) Пусть  $Q : SO(n) \rightarrow SO(n)$  — оператор возведения в  $k$ -ю степень ( $Q(A) = A^k$ ). Найдите  $Q'(e) : so(n) \rightarrow so(n)$  и вычислите его спектр.