Коммутаторы векторных полей

1. Для векторых полей X и Y на многообразии M вычислите коммутатор $[X, Y]$ и интегральные потоки полей X, Y и $[X,Y]$: (а) $M = \mathbb{R}^2$, $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ (б) $M = \mathbb{R}^2$, $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$; (в) $M = S^2$, X — продолжение на всю сферу поля $\cos\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$; Y — продолжение на всю сферу поля $\cos\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}$; здесь φ и ψ — долгота и широта, соответственно, — координаты на S^2 (докажите сначала существование и единственность продолжений).

2. Проведем через каждую точку $a = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ плоскость Π_a, заданную уравнением

$$p(y - q) + (z - r) = 0.$$

(а) Найдите векторные поля X и Y на $\mathbb{R}^3$ такие, что $X(a)$ и $Y(a)$ образуют базис в Π_a при каждом a, и вычислите их коммутатор.
(б) Существует ли в $\mathbb{R}^3$ гладкая поверхность (т.е. двумерное подмногообразие), для которой в каждой ее точке a плоскость Π_a является касательной?

3. Пусть G — группа Ли с единицей e.
(а) Докажите, что для всякого вектора $v \in T_eG$ существует и единственно векторное поле X_v, такое, что $X_v(e) = v$ и X инвариантно относительно лнвых сдвигов: для всякого $g \in G$ и $a \in G$ имеем $(L_g)'(a)X_v(a) = X_v(L_g(a))$; здесь $L_g : G \to G$ действует по формуле $L_g(a) = ga$.
(б) Докажите, что коммутатор двух левоинвариантных векторных полей тоже является левоинвариантным векторным полем.
(в) Вычислите явно левоинвариантные векторные поля и их коммутаторы на $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
(г) Тот же вопрос про $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

4. Найдите условие на векторное поле X в $\mathbb{R}^n$, при котором его интегральный поток Φ состоит из отображений $\Phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих (а) расстояние; (б) объем. Докажите, что построенные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора.