

Критические точки и критические значения

1. Рассмотрим отображение вещественной плоскости, записанное в комплексных координатах как $w = z^2 + 2\bar{z}$.

- (а) Найдите множество критических точек этого отображения.
- (б) Найдите поле ядер производной на окружности критических точек.
- (в) Найдите множество критических значений этого отображения.
- (г) Нарисуйте образы окружностей разных радиусов с центром в нуле при этом отображении.

2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — гладкая функция на \mathbb{R}^n . Докажите, что существует линейная функция $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ со сколь угодно малыми коэффициентами такая, что $f + l$ является функцией Морса.

3. Пусть M^n — компактное подмногообразие в \mathbb{R}^N . Докажите, что при $N \geq 2n + 2$ в \mathbb{R}^N существует такая гиперплоскость H , что ортогональная проекция на нее определяет вложение M^n в H .

4. (Слабая теорема Уитни) (а) Докажите, что любое компактное многообразие M^n можно вложить в \mathbb{R}^N для достаточно большого N . (б) Покажите, что N может быть взято равным $2n + 1$ (*Указание: воспользуйтесь результатом задачи 3.*).

5. Пусть M^n — подмногообразие в \mathbb{R}^N . Докажите, что существует такая точка $p \in \mathbb{R}^N$, что функция L_p является функцией Морса на M^n , где $L_p(x) = |x - p|^2$.