Гладкие многообразия

Топологией на множестве X называется система его подмножеств $\mathcal{T}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) если $U_\alpha \in \mathcal{T}$ то $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$ (объединение любого числа элементов топологии тоже является элементом топологии);
2) если $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{T}$ то $\bigcap_{k=1}^N U_\alpha \in \mathcal{T}$ (пересечение конечного числа элементов топологии тоже является элементом топологии);
3) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

Элементы топологии принято называть открытыми множествами. Действительно, открытые множества в $\mathbb{R}^n$ являются примером топологии. Множество X, снабженное топологией $\mathcal{T}$, называется *топологическим пространством.*

Топологию $\mathcal{T}$ называют *хаусдорфовой*, если для любых двух различных точек x и y из X найдутся открытые множества $x \in U \in \mathcal{T}$ и $y \in V \in \mathcal{T}$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.

Примерами нехаусдорфовых топологий служат: семейстово расширяющихся множеств, включающее пустое множество и все пространство или топология Зарийского.

Многобразием (топологическим многообразием) M размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство $(M, \mathcal{T})$, такое, что для любой точки $x \in M$ существует $x \in U \in \mathcal{T}$, гомеоморфное некоторой области $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$.

Нас будут больше интересовать гладкие многообразия, обладающие дополнительной гладкой структурой.

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое подмножество, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм U и $\varphi(U)$. Пара (U, φ) называется картой, а отображение φ координатами.

Набор карт $\{U_\alpha, \varphi)\}$, обладающий свойствами:
1) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$;
2) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to \varphi(U_\alpha \cap U_\beta)$ — C^k-диффеоморфизмы,
называется *C^k-атласом.*

Хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан хотя бы один C^k-атлас называется C^k-многообразием.

Два C^k-атласа называют *эквивалентными*, если их объединение снова является C^k-атласом.

Упр. Проверьте, что эквивалентость атласов задает отношение эквивалентности.

Легко видеть, что на пространстве всех атласов есть частичный порядок по включению и любое множество атласов имеет наибольший элемент. Отсюда следует, что существует C^k-атлас, который содержит все другие атласы. Этот атлас называют *C^k-структурой* многообразия M.

Касательное расслоение

Ростком функции f в точке $a \in M$ называется класс эквивалентности функций g, определенных в некоторой окрестности точки a и равных функции f в какой-то окрестности точки a.

Обозначим через $C_{a,k}$ множество C^k-ростков в точке a, через $S_{a,k}$ обозначим те ростки, хотя бы один представитель которых имеет нулевые частные производные в данной карте. Нетрудно заметить, что если один представитель ростка стационарен, то и все остальные тоже стационарны. Через $m_{a,k}$ обозначим множество ростков, равных нулю в точке a.

Заметим, что $C_{a,k}$, $S_{a,k}$ и $m_{a,k}$ суть линейные пространства, причем $S_{a,k}$ и $m_{a,k}$ — это подпространства пространства $C_{a,k}$.

Назовем *кокасательным пространством* к многообразию M в точке a следующее фактор-пространство $T^*_a M = C_{a,k}/S_{a,k}$. Касательным пространством, соответственно, назовем двойственное пространство $T_a M$ к $T^*_a M$, то есть пространство линейных функционалов на $T^*_a M$.

Лемма. Касательные векторы являются дифференцированиями.

Напомним, что дифференцированиями называются линейные функционалы на ростках, удовлетворяющие правилу Лейбница

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

Упр. Докажите лемму.

Назовем касательным расслоением многообразие $TM = \bigcup_{a \in M} T_a M$.

Векторные расслоения

Векторным расслоением называется локально-тривиальное раслоение со слоем — векторное пространство и отображением слоев на пересечении карт являющимся линейным отображением. В случае гладкого расслоения это отображение гладко зависит от точки в пересечении карт.

Более точно, рассмотрим тривиализующий атлас $\{\varphi, U_\alpha\}$ многообразия M, то есть такой атлас, что над каждой окрестностью U_α расслоение может быть задано как прямое произведение. Слоем расслоения будет пространство $\mathbb{R}^m$. *Коциклом* называется набор функций

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}),$$

гладко зависящий от точки $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ и удовлетворяющий двум условиям:

1) $g_{\alpha\beta}(x) = g^{-1}_{\beta\alpha}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$;
2) $g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = I$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Рассмотрим несвязное объединение

$$\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

На многообразии (1) определим следующее отношение эквивалентности:
- $(x, v) \sim (x, g_{ji}(x)v)$, если $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^m$, $(x, g_{ji}(x)v) \in U_j \times \mathbb{R}^m$
- $(x, v) \sim (x, v)$.

———————————————————————————

1 Лекция 6

1.1 Дифференциальные формы

Определение 1. Дифференциальная форма определенная в одной карте — кососимметрическая полилинейная функция (линейная по всем аргументам) на векторном пространстве.

Пусть L — k-форма в $\mathbb{R}^n$, $e_1, \dots, e_n$ - базис в $\mathbb{R}^n$, $v_i = \xi_i^1 e_1 + \dots + \xi_i^n e_n = \xi_i^j e_j$. (Соглашение из дифференциальной геометрии: если в формуле есть повторяющийся индекс, то по нему идет суммирование).

$$L(v_1, \dots, v_n) = L(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_k^{j_k} e_{j_k}) = \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_k^{j_k} L(e_{j_1}, \dots e_{j_k}) =$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_k^{j_k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} L(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) =$$

$$= \sum_{1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} a_{j_1 \dots j_k} \pi_{j_1} \wedge \dots \wedge \pi_{j_k}(v_1, \dots v_k)$$

Если $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, то

$$\pi_i = dx_i$$

$$\pi_{j_1} \wedge \dots \wedge \pi_{j_k} = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}.$$

Пример 1. Форма потока.
ω_v — 2-форма соответствующая потоку вектора v. Другими словами ω_v в точке x, будучи примененной к векторам v_1 и v_2 возвращает то количество жидкости потока вектора v, которое протекает через площадку в виде параллелограмма, натянутого на векторы v_1 и v_2 с началом в точке x.
За единицу времени через площадку протекает поток:

$$(v, \xi_1 \xi_2) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} = w_v(\xi_1, \xi_2) = v_1 \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + \dots$$

$dx \wedge dy$ — форма, носителем котрой является пространство натянутое на вектора $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

$$dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = 1$$

.

$$dx \wedge dy(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix}$$

$$v_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^n)$$

$$dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_1^{j_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_n^{j_1} & \dots & \xi_n^{j_k} \end{vmatrix}$$

1.2 Внешнее дифференциирование

Определение 2. На функциях f внешняя производная определяется как df.
Пусть ω — k-форма в координатах $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n} a_{j_1, \dots, j_k}(x) dx^{j_1} \wedge \dots dx^{j_k},$$

тогда

$$d\omega = \sum_{1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n} da_{j_1, \dots, j_k} \wedge (x) dx^{j_1} \wedge \dots dx^{j_k}.$$

Достаточно разобрать только случай одного слагаемого

$$\omega = a(x)dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Для произвольных форм формула получается из только что написанных по линейности.

Лемма 1. Для формы второго класса гладкости выполнено следующее утверждение:

$$\omega \in C^2 \Rightarrow d^2\omega \equiv 0.$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений положим $\omega = a(x)dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$.

$$d^2\omega = \sum_{i=1}^{n} d\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} \equiv 0$$

Выражение в скобках, очевидно, равно нулю, так как смешанные производные непрерывны, и как следствие равны, а стоящие при них формы противоположны по кососимметричности. $\square$

1.3 Дифференциальные формы в 3х мерном пространстве

Разберем формы в трехмерном пространстве.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$d : f \mapsto \mathrm{grad} f$$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

Определение 3.

$$rot(P, Q, R) := (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})$$

$$rot(\mathrm{grad} f) = 0$$

$$\omega^2 = \tilde{Q} dx \wedge dy + \tilde{P} dy \wedge dz + \tilde{R} dz \wedge dx$$

$$dw^2 = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Определение 4.

$$div(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}) := \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} \right)$$

$$\Omega^0 \xrightarrow{grad} \Omega^1 \xrightarrow{rot} \Omega^2 \xrightarrow{div} \Omega^3 \to 0$$

1.4 Преобразования дифференциальных форм при отображениях

Пусть $\varphi : U \to V, \quad U, V \subset \mathbb{R}^n$ — отображение областей в $\mathbb{R}^n$.

$$f : V \to \mathbb{R}^n.$$

Определим отображение

$$\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$$

следующим образом:

$$\varphi^* f = g \text{ — функция на } U$$

$$g(t) = f(\phi(t)).$$

Определение 5.

$$\omega : (T_t\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$$

$$(\varphi^* w^k(t))(\tau_1, \ldots, \tau_k) := w(\varphi'(t))(\varphi'\tau_1, \ldots, \varphi'\tau_k)$$

Свойства:

1. $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$
2. $(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$
3. $$x_i = \varphi_i(t)$$
$$w = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$
$$\varphi^* w = f(\varphi(t))d\varphi_1(t) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(t) = f(\varphi(t)\frac{\partial \varphi_1}{dt^1}dt^1 \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \varphi_k}{dt^k}dt^k)$$
$$d\varphi_j(t) = \varphi_j' dt$$
4. $$\varphi^*(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\varphi^* w_1 + \beta\varphi^* w_2$$

2 Лекция 7. Интегрирование дифференциальных форм по многообразию.

2.1 Немного определений

Определение 6. Атлас называется ориентирующим, если якобианы всех отображений $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to (\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j))$

Определение 7. Многообразие ориентируемо, если $\exists$ ориентирующий атлас.

Определение 8. Два атласа задают одну и ту же ориентацию, если их объединение - тоже ориентированный атлас.

Задача 1. У ориентируемого многообразия существует ровно 2 различные ориентации.

Определение 9. Хаусдорфово топологическое пространство называется многообразием с краем, если $\exists$ атлас $\{(\varphi_i, U_i)\}$, такой что $\varphi_i(U_i)$ — открытая окрестность в $\mathbb{R}^n$, либо в $\mathbb{H}^n$. Где $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 10. Краем многообразия называется пространство
$\bigcup_i \varphi_i^{-1}\{(0, x_2, \ldots, x_n)|(0, x_2, \ldots, x_n) \in U_i\}$.

Нужно проверить что есть непрерывные отображения границ.

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

Так как φ_i — гладкие, то:

$$\partial U_i = \{(0, t_1, \ldots, t_n) \subset U_i\},\ \partial U_j = \{(0, x_1, \ldots, x_n) \subset U_j\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\partial\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}(0, t_2, \ldots, t_n)$$

Лемма 2. Край многообразия является многообразием той же гладкости и размерности $n-1$.

Лемма 3. Ориентация многообразия с краем задает ориентацию на крае.

Доказательство.

$$t_0 = (0, t_0^2, \ldots, t_0^n) \xrightarrow{\phi} (0, \varphi^2(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0))$$

$$J_\phi(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^1} & \ldots & 0 \\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^1} & \ldots & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial t^1} & \ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial t^n} \end{pmatrix}$$

$$|J_\varphi| > 0 \Rightarrow |J_{\varphi|_{\partial M}}| > 0$$

$$\frac{\varphi^1(0, \ldots) - \varphi^1(-\Delta t, \ldots)}{\Delta t} \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^1}(0, \ldots) \geq 0$$

□

Определение 11. Согласованная ориентация это ориентация края, задаваемая ограничением ориентирующего атласа на край.

2.2 Интегрированние дифференциальных форм

Будем находиться в одной карте $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. Пусть $x_1, \ldots x_n$ - координаты, $\varphi^{-1}(U) = V_x \subset R^n$, $\omega = a(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — n-форма.

$$\int_U \omega := \int_{V_x} a(x)dx^1 \ldots dx^n \text{ (при фиксированной ориентации)}$$

Лемма 4. Определение интеграла не зависит от гладкой замены координат.

Доказательство.

$$x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j} dt^j$$

$$\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sum_\sigma sgn\sigma \cdot \frac{\partial x^1}{\partial t^{\sigma(1)}} \ldots \frac{\partial x^n}{\partial t^{\sigma(n)}} =$$

$$= \det \varphi'(t) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n$$

$$\int_{V_x} a(x)dx_1 \ldots dx_n = \int_{\varphi^{-1}(V_x)} a(\varphi(t))\varphi'(t)dt^1 \ldots dt^n.$$

□

2.3 Интегрирование на многобразии и разбиение еденицы

$A = \{(\phi_i, U_i)\}$ — атлас многообразия M.

Определение 12. Разбиением еденицы на M, согласованным с аталасом A называется набор гладких функцмй $\{\phi_\alpha(x)\}$, таких что

1. $\forall\alpha\forall x \in M \phi_\alpha(x) \geq 0$
2. $\forall\alpha\exists i : supp\ \phi_\alpha(x) \subset U_i$
3. $\forall x \in M \exists$ только конечное число таких α, что $\varphi_\alpha(x) > 0$
4. $\forall x \sum_\alpha \phi_\alpha(x) \equiv 1$.

Определение 13.

$$\omega_\alpha = \phi_\alpha\omega,\ \sum_\alpha \omega_\alpha = \omega$$

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_M \omega_\alpha$$

Лемма 5. Определение корреткно

Доказательство. Пусть $\{\phi_\alpha\}$ и $\{\psi_\beta\}$ - разбиения еденицы, соотвествующие различным аталасам.

$$\sum_{\alpha,\beta}(\phi_\alpha\psi_\beta) \sum_\alpha \phi_\alpha(x) = \sum_\beta \psi_\beta \equiv 1$$

$f_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha\psi_\beta$ — разбиение единицы, согласованное с обоими аталасами.

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M (f_{\alpha,\beta} \cdot \omega)$$

□

2.4 Формула Стокса

Если M - компакт, ориентации M и ∂M согласованы, то:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Пример 2.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

3 Лекция 8.

3.1 Формула Стокса

Теорема 1. ω — дифференциальная форма на компактном многобразии M, то

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Доказательство. С помощью разбиения еденицы $\phi_\alpha(x)$ сведем задачу к задаче для форму $\omega_\alpha = \phi_\alpha\omega$, supp $\omega_\alpha \subset U_i$. $\forall$ точки в карте рассмотрим куб I^n, с центром в этой точке, либо $\overline{I^n}$ если точка лежит на краю. Возьмем атлас состоящий из окрестнойстей $\phi^{-1}(I^n)$ для всех возможных центральных точек. Так как M - компактно, то выберем конечное подпокрытие.

Имеем атлас с окрестностями двух типов. Рассмотрим разбиение единицы, подчиненное этому атласу. Докажем формулу Стокса для ω_α, такую что:

- supp $\omega_\alpha \subset I^n$
- supp $\omega_\alpha\omega_\alpha \subset \overline{I^n}$

$d\omega$ - n-форма, ω — $(n-1)$-форма

$$\omega_\alpha = \sum_i a_i(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

По линейности (без ограничений общности)

$$\omega_\alpha = a_k(x) dx_k \wedge \ldots \wedge \hat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$d\omega_\alpha = \sum_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

1. $U = I^n$

$$\int_{I^n} d\omega = \int_0^r \int_0^r \ldots \int_0^r (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0$$

$$\int_0^r \frac{\partial a_k}{\partial x^k} dx_k = a_k(r) - a_k(0) = 0$$

2. $U = \overline{I^n}$

$$\int_{\overline{I^n}} d\omega = \int_0^r \int_0^r \ldots \int_0^r (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_k \wedge \ldots \wedge \hat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_k} = a_1(r) - a_1(0) = a_1(r, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\int_0^r (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_k = 0, k \neq 1$$

$$\int_{\overline{I_n}} d\omega = \int_0^r \int_0^r \ldots \int_0^r a_1(e, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n = \int_{\partial \overline{I^n}} \omega_\alpha$$

□

3.2 Дифференциальные формы

Определение 14. ω — замкнутая, если $d\omega = 0$

Определение 15. ω — точная, если $\exists \alpha : \omega = d\alpha$

Замечание 1. Замкнутые k-формы Z^k и точные k-формы B^k образуют линейные пространства и $B^k \subset Z^k$ (так как $d(d\omega)) = 0$).

Определение 16. M — стягиваемо $\iff$ M — гомотопически эквивалетно точке $x_0 \in M$, то есть $\exists f : M \times I \to M$ — непрервывное, такое что $f(x, 0) = x, x \in M$, $f(x, 1) = x_0, x \in M$.

Пример 3. Стянем $M = \mathbb{R}$:

$$f(x, \alpha) = (1 - \alpha)x$$

Лемма 6. (Пуанкаре)
Если M - стягиваемо и ω — замкнута, то $\exists \alpha : d\alpha = \omega$ (то есть форма замкнута тогда и только тогда когда она точна).

Доказательство. Рассмотрим $\phi_{0,1} : M \to M \times I$

$$\phi_0 : x \mapsto (x, 0)$$

$$\phi_1 : x \mapsto (x, 1)$$

$\Omega^k(M)$ - пространство k форм на M.

$$\phi_i^* : \Omega^k(M \times I) \to \Omega^k(M)$$

Оператор $K : \Omega^{k+1}(M \times I) \to \Omega^k(M)$ по линейности достаточно определить на мономах:

$$K(a(x,t)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}}) := 0$$

$$K(a(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) := (\int_0^1 a(x,t)dt)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Свойство K:

$$K(d\omega) + d(K\omega) = \phi_1^*\omega - \phi_0^*\omega$$

Докажем это свойство:
По линейности достаточно доказать это утверждение для одного монома.

1.
$$\omega = a(x,t)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}}$$
$$K(\omega) = 0 \Rightarrow d(K\omega) = 0$$
$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t}dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}} + [\text{члены без dt}]$$
$$K(d\omega) = K(\frac{\partial a}{\partial t}dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}}) = (\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}dt)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}} =$$
$$= (a(x,1) - a(x,0))dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}} = \phi_1^*\omega - \phi_0^*\omega$$

2.
$$\omega = a(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

   Заметим, что $\phi_i^*\omega = 0$

$$K(d\omega) = K(-\sum_{i_0} \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt \wedge dx^{i_0} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = -\sum_{i_0} (\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt) dx^{i_0} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$d(K\omega) = d((\int_0^1 a(x,t)dt)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = \sum_{i_0} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} (\int_0^1 a(x,t)dt)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

   Значит $K(d\omega) + d(K\omega) = 0 = \phi_0^* + \phi_1^*$

$$h : M \times I \to M \text{ - гомотопия M и точки}, \omega \in \Omega^{k+1}(M)$$
$$h(x,0) = x_0$$
$$h(x,1) = x$$
$$h \circ \phi_1 : M \to M$$
$$h \circ \phi_0 : M \to x_0$$
$$(\phi_1^* \circ h^*)\omega = \omega$$
$$(\phi_0^* \circ h^*)\omega = 0$$
$$K(d(h^*\omega)) + d(K(h^*\omega)) = (\phi_1^* \circ h^*)\omega - (\phi_0^* \circ h^*)\omega = 0$$
$$d(h^*\omega) = h^* d\omega = 0$$

Значит искомое $\alpha = K h^* \omega$ □

Задача 2.

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy \text{ — замкнутая}$$

Найти $\alpha : \omega = d\alpha$

4 Лекция 9.

4.1 Формулы двумерного и трехмерного анализа

4.1.1 Формула Грина

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$
$$F = (P, Q)$$
$$\int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial G} Pdx + Qdy = \int_\gamma Pdx(t) + Qdy(t) =$$
$$= \int_\gamma P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) = \int_\gamma (F, \gamma) dt$$

4.1.2 Формула Гаусса-Остроградского

Пусть имеется область $D \subset \mathbb{R}^3$.

$$F = (P, Q, R)$$
$$divF = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$
$$\iiint_D divF = \iint_D Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

(u, v) - локальные координаты на поверхности

$$\xi = (x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v))$$
$$\eta = (x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v))$$
$$\omega(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$\iiint_D divF = \iint_{\partial D} (F, n) dS$$

4.1.3 Уравнение теплопроводности

$U(t,x,y,z)$ - температура в точке (x,y,z) в момент времени t
K - коэфициент теплопроводности
S - площадь маленькой площадки
$-k\cdot(grad\ U,n)\cdot S\cdot\Delta t$ - количество тепла передаваемого через данную площадку за еденицу времени, с другой стороны оно равно $\Delta V\cdot\rho\cdot(U(t+\Delta t,x,y,z)-U(t,x,y,z))$
Без нагревания:

$$\Delta V\cdot\rho\cdot\frac{U(t+\Delta t,x,y,z)-U(t,x,y,z)}{\Delta t}\simeq$$

$$\simeq\Delta V\cdot\rho\cdot U_t'(t,x,y,z)\simeq\iiint_D \rho U_t'(t,x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$-k\cdot(grad_{x,y,z}\ U,n)\cdot S=\int_{\partial D}-k\cdot(grad\ U,n)dS=\iiint_D -k\cdot div\ grad\ F dx\wedge dy\wedge dz$$

$$-k\cdot div\ grad\ U=-\rho U_t$$

$$U_t=\frac{k}{S}\Delta U=U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}$$

4.2 Критические точки и критически значения

Рассмотри гладкое отображение $F: M^m\to N^n$.

Определение 17. Критической точкой отображения f - называется точка, в которой производная $f': T_aM\to T_{f(a)}N$ - имеет не максимальный ранг (то есть $rk\ f'<\min(m,n)$).

Определение 18. Критическим значением называется $f(a)$, где a - критическая точка.

Задача теории особенностей — это классификация особых точек. Класс эквивалентности отображений состоит из всех отображений, которые получаются из данного диффеоморфной заменой координат в образе и прообразе.

$$g(x)=k(f(h^{-1}(x)))$$

Лемма 7. В окрестности некритической точки отображение может быть приведено к виду $\tilde{y}_i=\tilde{x}_i$

Доказательство. Следствие из теоремы об обратной функции. □

Определение 19. Норма на пространстве отображений это

$$\|F\|_k=\sum\|f_i\|+\sum\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\|+\ldots+\sum\|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\|$$

Определение 20. Особая точка отображения называется устойчивой, если любое достаточно близкое к нему отображение эквивалентно ему локально.

Теорема 2. (Уитни)
Отображение двумерных многообразий устойчиво $F: M^2\to N^2$ устойчиво тогда и только тогда, когда в окрестности любой точки оно эквивалетно одному из трех:

1. $y_1=x_1, y_2=x_2$ (регулярная точка);
2. $y_1=x_1^2, y_2=x_2$ (складка);
3. $y_1=x_1^3+x_1x_2, y_2=x_2$ (сборка Уитни).

Теорема 3. (Сард)
Мера множества критических значений достаточно гладкого отображения равна нулю.

Доказательство. Докажем серией лемм.

Лемма 8. Пусть $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, тогда мера множества критических значений нулевая.

Доказательство. x — критическая, если $f'(x) = 0$.
Разобьем $[0;1]$ на N равных отрезков. Отметим $I_{\alpha_1}, \ldots, I_{\alpha_k}$ — те отрезки на которых есть критические точки. Пусть $x_i \in I_j$ — критическая точка, тогда

$$f(x) - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + o(|x - x_i|^2)$$

$$\exists C_1 |f(x) - f(x_i)| < C_1 |x - x_i|^2$$

$$\forall x_1', x_2' \in I_j \Rightarrow |f(x_1') - f(x_2')| < |f(x_1') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_2')| \leq 2C_1 \frac{1}{N^2}$$

$$\forall x_1', x_2' \in I_j \ |f(x_1') - f(x_2')| < \frac{C}{N^2}$$

$f(I_\alpha)$ — принадлежит отрезку длины $< \frac{C}{N^2}$. Даже если критические точки были во всех отрезках I_j, то общая мера

$$\sum \mu(f(I_j)) \leq \frac{C}{N^2} \cdot N = \frac{C}{N} \to 0, N \to \infty$$

Следовательно мера критических точек будет равна 0. □

Продолжение следует. □

Полное доказательство теоремы Сарда можно прочитать в [6].

5 Литература

Понятия гладкого многообразия и касательного вектора можно прочитать в книге [1].

Про векторные расслоения можно прочитать в [3] (лекция 2).

Про коммутаторы векторных полей, гладкие распределение и теорему Фробениуса можно прочитать в [2].

Про дифференциальные формы и формулу Стокса в [4].

Список литературы

[1] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях* // Мир, 1971.

[2] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* // Мир, 1987.

[3] А.А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений* // МЦНМО, 2009.

[4] В.А. Зорич, *Математический анализ, т. 2* // МЦНМО, 2012.

[5] С.П. Новиков, И.А. Тайманов, *Геометрические структуры и поля* // МЦНМО, 2005.

[6] В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений* // МЦНМО, 2004.