ЛЕКЦИИ 1–2

Краткое содержание. Частично упорядоченные множества. Функция Мебиуса.

Частично упорядоченным множеством называется множество M (конечное или нет) с отношением $\leq$, которое обладает следующими свойствами

1) (рефлексивность) $\forall a \in M\, a \leq a$
2) (транзитивность) если $a \leq b \leq c$, то $a \leq c$.
3) (антисимметричность) если $a \leq b \leq a$, то $a = b$.

Наиболее употребительные в дальнейшем примеры:

Пример 1. "Пустое" частичное упорядочение: $a \leq b \Longleftrightarrow a = b$.

Пример 2. Множества $M = \mathbb{Z}$ и $M = \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с обычным упорядочением. Это пример *линейно* упорядоченного множества, в котором любые два элемента сравнимы: для произвольных a, b либо $a \leq b$, либо $b \leq a$.

Пример 3. $M = \mathbb{Z}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, и $a \leq b$ означает, что b делится на a.

Пример 4. Пусть G — конечный ориентированный граф без петель и кратных ребер, M — множество его вершин. Будем говорить, что вершины $a, b \in M$ связаны отношением $a \leq b$, если существует путь из a в b, идущий по ребрам согласно их ориентации. Как нетрудно видеть, это отношение всегда рефлексивно (пути нулевой длины тоже рассматриваем) и транзитивно; оно антисимметрично тогда и только тогда, когда G не содержит ориентированных циклов.

Пример 5. X — произвольное множество, $M = 2^X$ — множество всех его подмножеств, $a \leq b$ означает $a \subseteq b$.

Пример 6. $M = \mathcal{P}_n$ — множество всевозможных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на непустые подмножества; $a \leq b$ означает, что a получено из b дальнейшим подразбиением (т.е. всякое подмножество — элемент a является подмножеством некоторого подмножества — элемента b). Например, P_3 состоит из 5 элементов: $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. Первый элемент больше всех остальных, последний — меньше всех, остальные три не сравнимы друг с другом.

Элемент $a \in M$ называется *наименьшим*, если $a \leq b$ для любого $b \in M$; *минимальным*, если $b \leq a$ только при $b = a$. Наименьший элемент является минимальным (следует из антисимметричности отношения $\leq$), обратное не обязательно. Наименьший элемент, если существует, то единствен, а минимальных элементов может быть много, но любые два минимальных элемента попарно несравнимы. Если наименьший элемент существует, то он является единственным минимальным; для конечных частично упорядоченных множеств верно и обратное: если минимальный элемент единствен, то он является наименьшим (докажите!).

Аналогично определяются понятия наибольшего и максимального элемента.

Частично упорядоченные множества примеров 2 (с $M = \mathbb{Z}_{\geq 0}$), 3, 5 и 6 имеют наименьшие элементы: в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ это 0, в $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ с отношением делимости это 1, в 2^X это $\varnothing$, в разбиениях — разбиение на n подмножеств (каждое из которых содержит один элемент). В примерах 5 и 6 есть также наибольшие элементы — соответственно, X и разбиение с одной частью. В примере 1 каждый элемент является минимальным и максимальным. В примере 4 минимальный элемент это *сток* — вершина, из которой не выходит не одного ребра, а максимальный это *источник* — вершина, в которую ни одно ребро не входит.

Частично упорядоченное множество M называется локально конечным, если для любых двух его элементов a и b множество $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$ конечно (разумеется, $[a, b] \neq \varnothing$ только при $a \leq b$). Для удобства также обозначим $[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \setminus \{b\}$.

Пусть теперь $C(M)$ — множество функций с вещественными значениями (в принципе, $\mathbb{R}$ можно заменить произвольной абелевой группой), аргументом которых являются пары $(a, b) \in M \times M$, для которых $a \leq b$. На этом множестве определена операция свертки, превращающая его (докажите!) в ассоциативную коммутативную алгебру: $(f * g)(a, b) = \sum_{x \in [a,b]} f(a, x) g(x, b)$. Единицей в этой алгебре является функция

$$\mathbf{1}(a, b) = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b. \end{cases}$$

Функцию, принимающую значение 1 на любой паре $(a, b), a \leq b$, традиционно обозначают $\zeta(a, b)$.

Теорема 1. *Для любого локально конечного частично упорядоченного множества существует и единственна функция $\mu \in C(M)$, называемая функцией Мебиуса, для которой $\mu * \zeta = 1$. Функция Мебиуса удовлетворяет соотношению*

$$\mu(a,b) = \begin{cases} 1, & a = b, \\ -\sum_{x\in[a,b)} \mu(a,x), & a \le b, a \ne b \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что уравнения (1) в точности эквивалентны равенству $\mu * \zeta = \mathbf{1}$. Тем самым нужно доказать, что существует и единственна функция $\mu \in C(M)$, удовлетворяющая (1).

Зафисксируем $a \in M$ и обозначим X_a множество элементов $b \ge a$, для которых значение $\mu(a,b)$ определено уравнениями (1) однозначно. Докажем, что X_a состоит из всех точек $b \ge a$. Очевидно, $a \in X_a$, так что $X_a \ne \varnothing$. Пусть существует $y_1 \notin X_a$, $a \le y_1$. Если $[a,y_1) \subset X_a$, то (1) однозначно определяет значение $\mu(a,y_1)$, что противоречит выбору y_1. Тем самым существует $y_2 \in [a,y_1) \setminus X_a$. Продолжая процесс, получим последовательность $y_1 > y_2 > \dots > a$, элементы которой не лежат в X_a. Поскольку $[a,y_1]$ — конечное множество, такая бесконечная последовательность невозможна, и теорема доказана. □

Пусть M — локально конечное частично упорядоченное множество, в котором существует наименьший элемент 0. Для произвольной функции $f : M \to \mathbb{R}$ определим функцию $\mathcal{I}[f] : M \to \mathbb{R}$ равенством $\mathcal{I}[f](x) = \sum_{y\le x} f(y)$ (суммирование производится по конечному множеству $[0,x]$).

Теорема 2 (формула обращения Мебиуса). *1) Для всякого $x \in M$ имеет место равенство $f(x) = \sum_{y\le x} \mu(x,y)\mathcal{I}[f](y)$.*

2) Если для функции $g : M \to \mathbb{R}$ и произвольного $x \in M$ имеет место равенство $f(x) = \sum_{y\le x} \mu(x,y)g(y)$, то $g = \mathcal{I}[f]$.

3) Если для функции $\nu \in C(M)$ и произвольной функции $f : M \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $f(x) = \sum_{y\le x} \nu(x,y)\mathcal{I}[f](y)$, то $\nu = \mu$ (функция Мебиуса).

Доказательство. Докажем пункт 1. Пусть $f,g : M \to \mathbb{R}$; определим функции $F,G \in C(M)$ равенствами $F(0,y) = f(y)$, $G(0,y) = g(y)$ для всякого $y \in M$ и $F(x,y) = 0$, $G(x,y) = 0$ для всех $x \ne 0$ и любого $y \ge x$. Легко проверить, что равенство $g = \mathcal{I}[f]$ эквивалентно $G = F*\zeta$, а равенство пункта 1 — равенству $F = G*\mu$. Но в силу ассоциативности свертки если $G = F*\zeta$, то $G*\mu = F*\zeta*\mu = F$ (это утверждение пункта 1), и наоборот, если $F = G*\mu$, то $F*\zeta = G*\mu*\zeta = G$ (утверждение пункта 2).

Доказательство пункта 3 — упражнение. □

Примеры функций Мебиуса конкретных частично упорядоченных множеств:

Пример 7. Если $M = \mathbb{Z}$ или $M = \mathbb{Z}_{\ge 0}$ с обычным (линейным) упорядочением, то $\mu(x,x) = 1$, $\mu(x-1,x) = -1$ и $\mu(y,x) = 0$ во всех остальных случаях. Действительно, если $y < x$, то $\sum_{y\le z\le x} \mu(z,x) = 1 - 1 = 0$, то есть функция удовлетворяет уравнению (1). Согласно теореме 1 этим доказано, что μ — функция Мебиуса. Формула обращения Мебиуса применима к $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ и выглядит так: если $g(x) = \sum_{y=0}^{x} f(y)$, то $f(0) = g(0)$ и $f(x) = g(x) - g(x-1)$ при $x > 0$.

Произведением частично упорядоченных множеств $(M_1, \le_1)$ и $(M_2, \le_2)$ называется множество $(M, \le)$, где $M = M_1 \times M_2$ и $(a_1,a_2) \le (b_1,b_2)$ означает, что $a_1 \le_1 b_1$ и $a_2 \le_2 b_2$. Если множества M_1 и M_2 локально конечны, то $M_1 \times M_2$ также локально конечно (поскольку $[(a_1,a_2),(b_1,b_2)] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$). Из уравнения (1) вытекает, что $\mu((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \mu_1(a_1,b_1)\mu_2(a_2,b_2)$, где μ, μ_1, μ_2 — функции Мебиуса множеств M, M_1 и M_2 соответственно. Аналогично определяется произведение любого конечного набора частично упорядоченных множеств.

Пусть теперь $\{(M_\alpha. \le_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ — бесконечное семейство частично упорядоченных множеств. Прямое произведение $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$ наделяется частичным упорядочением так же, как и в конечном случае, но вообще говоря уже не будет локально конечным, даже если все $(M_\alpha, \le_\alpha)$ таковы. Предположим теперь, что каждое M_α содержит наименьший элемент 0_α. Тогда можно определить прямую сумму $\coprod_{\alpha\in A} M_\alpha$, элементами которой являются наборы $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где $x_\alpha \in M_\alpha$ и для всех α, кроме конечного числа, имеет место равенство $x_\alpha = 0_\alpha$. Частичное упорядочение на прямой сумме определяется так же, как на прямом произведении: $(x_\alpha) \le (y_\alpha)$, если $x_\alpha \le_\alpha y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ (при этом реально нужно проверить только конечное число отношений, т.к. остальные имеют вид $0_\alpha \le_\alpha 0_\alpha$). Легко проверить (проделайте!), что если все $(M_\alpha, \le_\alpha)$ локально конечны, то $\left(\coprod_{\alpha\in A} M_\alpha, \le\right)$ тоже, и что функция Мебиуса прямой суммы задается равенством $\mu((x_\alpha),(y_\alpha)) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)$, где μ_α — функция Мебиуса M_α; произведение на самом деле конечное, т.к. все его члены, кроме конечного числа, равны 1.

Пример 8. Любое целое число $x \ge 1$ однозначно представимо в виде $x = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\dots$, где произведение берется по множеству простых чисел, все $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, и все α_i, кроме конечного числа, равны 0. Число x является делителем числа $y = 2^{\beta_2}3^{\beta_3}5^{\beta_5}\dots$, если $\alpha_i \le \beta_i$ для всех i. Отсюда вытекает, что частично упорядоченное множество $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, |)$ с отношением делимости $|$ является прямой суммой счетного числа копий (по количеству простых чисел) частично упорядоченного множества $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$.

Отсюда вытекает, что функция Мебиуса множества $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, |)$ равна $\mu(y/x)$, где в данном случае $\mu(a)$ — функция Мебиуса в теоретико-числовом смысле: $\mu(a) = 0$, если a делится на квадрат простого числа, и $\mu(a) = (-1)^k$, если $a = p_1 p_2 \dots p_k$ — произведение k различных простых.

Пусть теперь $f(n) = 1$ для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Тогда $\mathcal{I}[f](n)$ равно $d(n)$ — количеству делителей числа n. Формула обращения Мебиуса теперь дает равенство $1 = \sum_{q|n} \mu(n/q) d(q)$ для всякого $n \geq 1$. Если $f(n) = n$, то $\mathcal{I}[f](n) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(n)$ — сумма делителей числа n, и формула обращения Мебиуса дает $n = \sum_{q|n} \mu(n/q)\sigma(q)$.

Пример 9. Пусть $M = 2^X$ — множество подмножеств конечного множества X, упорядоченное по включению. Тогда $\mu(a, b) = (-1)^{\#a - \#b}$ для любой пары подмножеств $a \subseteq b \subseteq X$.

Действительно, проверим равенство (1): $\sum_{a \subseteq x \subseteq b} (-1)^{\#x - \#a} = \sum_{y \subseteq b \setminus a} (-1)^{\#y}$. Если $a = b$, то сумма содержит единственный член $y = \varnothing$ и равна 1. Если $a \neq b$, то выберем элемент $u \in b \setminus a$ и разобьем множества $y \subseteq b \setminus a$ на пары вида $(y_1, y_2) = (y_1, y_1 \cup \{u\})$, где $u \notin y_1$. Поскольку $(-1)^{\#y_2} = -(-1)^{\#y_1}$, слагаемые $(-1)^{\#y_1}$ и $(-1)^{\#y_2}$ в (1) компенсируют друг друга — следовательно, сумма равна 0.

Назовем цепью длины i, соединяющей элементы $a, b \in M$, последовательность $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i = b$. Обозначим $C_i(a, b)$ множество таких цепей и $c_i(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \#C_i(a, b)$ их количество.

Теорема 3 (Ф. Холл)**.** *Функция Мебиуса локально конечного частично упорядоченного множества M равна $\mu(a, b) = \sum_i (-1)^i c_i(a, b)$ для произвольных $a \leq b$.*

Доказательство. Зафиксируем $a \in M$. Если $a = b$, то теорема очевидна (сумма в правой части содержит единственное слагаемое, для которого $i = 0$). Предположим, что для некоторого $b > a$ утверждение теоремы не выполнено.

Предположим сначала, что оно выполнено при этом для всех $z \in [a, b)$. Удалим из произвольной цепи $x_0 < \dots < x_i \in C_i(a, b)$ наибольший элемент и получим цепь $x_0 x \dots x_{i-1} \stackrel{\text{def}}{=} z \in C_{i-1}(a, z)$. Эта операция устанавливает взаимно однозначное соответствие между $C_i(a, b)$ и $\bigsqcup_{z \in [a, b)} C_{i-1}(a, z)$. Тогда

$$\mu(a, b) = -\sum_{a \leq z < b} \mu(a, z) = -\sum_{a \leq z < b} \sum_{i \geq 1} (-1)^{i-1} c_{i-1}(a, z) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i c_i(a, b),$$

и теорема выполнена для пары (a, b) вопреки выбору b. Следовательно, существует y_1, $a < y_1 < b$, для которого теорема неверна. Аналогично, найдется y_2, $a < y_2 < y_1$ с таким же свойством, и т.д. — доказательство завершается так же, как доказательство теоремы 1. □

Упражнения

Упражнение 1.1. Пусть $A_1, \dots, A_k \subset X$ — подмножества конечного множества. а) Докажите *формулу включений-исключений*: $\#(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$. б) Придумайте функции $f, g : 2^{\{1, \dots, n\}} \to \mathbb{Z}$ такие, что формула $g(A) = \sum_{B \subset A} f(B)$ эквивалентна формуле включений-исключений. Какое утверждение дает применение формулы обращения Мебиуса к этим f, g?

Упражнение 1.2. Пусть $\mathcal{P}_n$ — частично упорядоченное множество разбиений, определенное в примере 6. а) Пусть $\mathbf{1}$ — наибольший элемент этого множества, т.е. разбиение с единственной частью $\{1, \dots, n\}$, а $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ — разбиение на k частей. Докажите, что $\mu(\sigma, \mathbf{1}) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. б) Найдите и докажите формулу для функции Мебиуса $\mu(\sigma, \tau)$, где $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_n$ — произвольные разбиения.