ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Числа Гурвица и уравнение cut-and-join.

Назовем разбиением λ невозрастающую последовательность целых положительных чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$; числа λ_i — *части* рабиения. Обозначим $\#\lambda \stackrel{\text{def}}{=} s$ и $|\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \dots + \lambda_s$ (говорят, что λ — разбиение числа $n \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda|$; еще в этом случае пишут $\lambda \vdash n$, но мы не будем). Символом $C_\lambda \subset \Sigma_n$ обозначают множество перестановок чисел $1, \dots, n$ циклического типа λ, т.е. раскладывающихся в произведение непересекающихся циклов длин $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Приведем несколько фактов про множества C_λ; их доказательства — (легкое) упражнение:

1) Пусть $\tau \in \Sigma_n$ — произведение непересекающихся циклов $(a_1^{(1)}, \dots, a_{\lambda_1}^{(1)}) \dots (a_1^{(s)}, \dots, a_{\lambda_s}^{(s)})$, а $\sigma \in \Sigma_n$ — произвольная перестановка, то перестановка $\sigma tau \sigma^{-1} \in \Sigma_n$ является произведением циклов $(\sigma(a_1^{(1)}), \dots, \sigma(a_{\lambda_1}^{(1)})) \dots (\sigma(a_1^{(s)}), \dots, \sigma(a_{\lambda_s}^{(s)}))$. Отсюда вытекает, что C_λ — класс сопряженности в группе перестановок Σ_n.
2) Пусть в разбиении λ содержится k_1 частей $\lambda_i = 1$, k_2 частей $\lambda_i = 2$, и т.д.; очевидно, $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Иногда удобно писать $\lambda = 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$. Тогда $\#C_\lambda = \frac{n!}{1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n} k_1! k_2! \dots k_n!}$.
3) Пусть $\tau \in C_\lambda$ — произведение циклов, как в свойстве 1. Тогда при $1 \leq i \neq j \leq s$ (два несовпадающих цикла) и произвольных $1 \leq p \leq \lambda_i$, $1 \leq q \leq \lambda_j$ имеем
$$\tau(a_p^{(i)} a_q^{(j)}) = (a_1^{(i)} \dots a_{p-1}^{(i)} a_q^{(j)} \dots a_{\lambda_j}^{(j)} a_1^{(j)} \dots a_{q-1}^{(j)} a_p^{(i)} \dots a_{\lambda_i}^{(i)}) \dots,$$
где многоточие — совокупность всех остальных циклов в τ, кроме i-го и j-го. Тем $\tau(a_p^{(i)} a_q^{(j)}) \in C_{\lambda'}$, где λ' содержит часть $\lambda_i + \lambda_i$, частей λ_i и λ_j не содержит, а остальные части — такие же, как в λ. Напротив, для любого цикла $1 \leq i \leq s$ и произвольных $1 \leq p < q \leq \lambda_i$ имеем
$$\tau(a_p^{(i)} a_q^{(i)}) = (a_1^{(i)} \dots a_{p-1}^{(i)} a_q^{(i)} \dots a_{\lambda_i}^{(i)})(a_p^{(i)} \dots a_{q-1}^{(i)}) \dots,$$
где многоточие — совокупность всех остальных циклов в τ, кроме i-го. Тем самым $\tau(a_p^{(i)} a_q^{(i)}) \in C_{\lambda'}$, где λ' не содержит части λ_i, а взамен — две части, $\mu = q - p$ и $\lambda_i - \mu$; остальные части такие же, как в λ.
4) Четность произвольной перестановки $\sigma \in C_\lambda$ совпадает с четностью числа $|\lambda| - \#\lambda = \sum_{i=1}^s (\lambda_i - 1)$.

Определение 1. Факторизацией перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ называется набор $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ такой, что $(a_1 b_1) \dots (a_m b_m) = \sigma$ (произведение транспозиций в группе Σ_n). Факторизация называется транзитивной, если граф с вершинами $1, \dots, n$ и ребрами $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ — связный.

Лемма 1. *Если $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ — транзитивная факторизация перестановки $\sigma \in C_\lambda$, то число $m - |\lambda| - \#\lambda + 2$ — четное и неотрицательное.*

Доказательство. Докажем индукцией по m, что если перестановка $\sigma \in C_\lambda$ имеет транзитивную факторизацию длины m, то $\#\lambda \leq m + 2 - |\lambda|$.

Базу индукции составляет случай $m = n - 1$; связный граф с n вершинами и $(n-1)$ ребрами — дерево; здесь мы применим индукцию по n. Если $(a_1 b_1) \dots (a_m b_m) = \sigma \in C_\lambda$, то $(a_m b_m)(a_1 b_1) \dots (a_{m-1} b_{m-1}) = (a_m b_m) \sigma (a_m b_m)^{-1} \in C_\lambda$ согласно свойству 1, так что циклический тип произведения $(a_1 b_1) \dots (a_m b_m)$ не меняется при циклической перестановке сомножителей. Таким образом можно считать, что в последнем сомножителе $(a_m b_m)$ вершина b_m — висячая (т.е. в нее входит только одно ребро (a_m, b_m); в дереве обязательно имеется такая вершина). Кроме того, поскольку $(b_m n) \sigma (b_m n)^{-1} \in C_\lambda$ согласно свойству 1, можно без ограничения общности считать, что висячая вершина имеет номер n. Тогда в произведении $\sigma' \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 b_1) \dots (a_{m-1} b_{m-1})$ все $a_i, b_i \in \{1, \dots, n-1\}$, откуда по предположению индукции вытекает, что $\sigma' \in C_{(n-1)}$ (то есть это циклическая перестановка точек $1, \dots, n-1$). Согласно свойству 3, отсюда вытекает, что $\sigma = \sigma'(a_m n)$ — циклическая перестановка, и база индукции доказана: $\#\lambda = 1 = m - |\lambda| + 2$.

Шаг индукции: пусть теперь $m \geq n$ произвольно. Сделав, при необходимости, циклическую перестановку сомножителей, можно считать, что ребро (a_m, b_m) входит в некоторый цикл в графе (если число ребер графа не меньше числа вершин, то хотя бы один цикл в нем имеется). Тогда удаление ребра (a_m, b_m) из графа оставляет его связным, так что для перестановки $\sigma' = (a_1 b_1) \dots (a_{m-1} b_{m-1}) \in C_\mu$ имеем, по предположению индукции, $\#\mu \leq (m-1) - n + 2$, откуда по свойству 3 получаем $\#\lambda \leq \#\mu + 1 \leq m - n + 2$.

Утверждение о четности следует из свойства 4. $\square$

Определение 2. Пусть λ — разбиение, $|\lambda| = n$, и g — целое неотрицательное число. Числом Гурвица $h_{g,\lambda}$ называется количество транзитивных факторизаций длины $m(g, \lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} n + \#\lambda + 2g - 2$ всех перестановок $\sigma \in C_\lambda$, деленное на $n!$.

Пример 1. Пусть $\lambda = (n)$ и $g = 0$. Произведение $(a_1 b_1) \dots (a_{n-1} b_{n-1}) \in C_\lambda$ для любого связного графа с $m = n-1$ ребрами, то есть для любого дерева. Тем самым количество таких факторизаций равно количеству деревьев с нумерованными вершинами и ребрами, то есть $n^{n-2}(n-1)!$. Отсюда вытекает, что $h_{0,(n)} = n^{n-3}$.

Введем теперь счетное число переменных $p_1, p_2, \dots,$ и рассмотрим производящую функцию

$$H(\beta, p) = \sum_{g,\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_s)} h_{g,\lambda} \frac{p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}}{s!} \frac{\beta^{m(g,\lambda)}}{m(g,\lambda)!}$$

Лемма 2. *$e^H = \sum_{m,\lambda} \widetilde{h}_{m,\lambda} \frac{p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}}{s!} \frac{\beta^m}{m!}$, где $\widetilde{h}_{m,\lambda}$ — общее количество факторизаций (не обязательно транзитивных) длины m перестановок $\sigma \in C_\lambda$.*

Доказательство. Коэффициент при β^m в функции e^H равен $\sum_k \frac{1}{k!} \times$ коэффициент при β^m в H^k, то есть

$$\sum_k \frac{1}{k!} \sum_{m_1+\dots+m_k=m} \sum_{\substack{g_1,\dots,g_k \\ \lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)} \\ m(g_1,\lambda^{(1)})=m_1,\dots,m(g_k,\lambda^{(k)})=m_k}} h_{g_1,\lambda^{(1)}} \dots h_{g_k,\lambda^{(k)}} \frac{p_{\lambda_1^{(1)}} \dots p_{\lambda_{s_k}^{(k)}}}{s_1! \dots s_k!} \frac{1}{m!}$$

Каждое слагаемое представляет собой количество факторизаций длины m перестановок $\sigma \in C_\lambda$ таких, что граф состоит из k компонент связности, содержащих $m_1, \dots, m_k$ ребер соответственно. □

Теорема 1. *Функция $F \stackrel{def}{=} e^H$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial F}{\partial \beta} = AF$, где*

$$A \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left((i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right).$$

Доказательство. Коэффициент при $\beta^m p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}$ в левой части дифференциального уравнения равен количеству факторизаций длины $(m+1)$ перестановок $\sigma \in C_\lambda$, деленному на $m!$ — то есть деленному на $(m+1)!$ количеству факторизаций, в которых одно из $(m+1)$ ребер соответствующего графа отмечено. Соответствующий коэффициент справа состоит, при каждом i и j, из двух слагаемых: $ij\times$ деленное на $m!$ количество факторизаций длины m перестановок $\tau \in C_\mu$, где μ получено из λ выкидыванием части, равной $(i+j)$, и $(i+j)\times$ деленное на $m!$ количество факторизаций длины m перестановок $\tau \in C_\mu$, где μ получено из λ выкидыванием частей, равных i и j. Согласно свойству 3, сумма по i и j равна деленному на $m!$ количеству факторизаций длины m перестановок τ, в которых отмечены две вершины a и b, и $\tau(ab) \in C_\lambda$. Как нетрудно видеть, это то же самое, что в левой части. □