ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Бозон-фермионное соответствие и собственные функции оператора cut-and-join. Свойства многочленов Шура (без доказательства) и явная формула для чисел Гурвица.

Назовем множество $M \subset \mathbb{Z}$ полуконечным, если множества $M_+ = M \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $M_- = \mathbb{Z}_{<0} \setminus M$ конечны; число $c(M) = \#M_+ - \#M_-$ называется зарядом множества M. Для произвольного разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ (напомним, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 1$) можно определить полуконечное множество $M_\lambda = \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_s - s\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq -s-1\}$. Нетрудно видеть, что $c(M_\lambda) = 0$ и что любое полуконечное множество заряда 0 есть M_λ для некоторой λ (включая $M_\varnothing = \mathbb{Z}_{<0}$).

Каждому полуконечному множеству M сопоставим формальный символ $v_M = \bigwedge_{m \in M} z_m$. Здесь удобно считать, что символ $\wedge$ — кососимметрическое умножение и переменные z_m в определении v_M перечислены в порядке возрастания, так что произведение $\bigwedge_{m\in M} z_m$ бесконечное влево и конечное вправо. Векторное пространство, порожденное всеми v_M, называется пространством Фока и обозначается $\Lambda^{\infty/2}$; оно является прямой суммой $\bigoplus_{c\in\mathbb{Z}} \Lambda_c^{\infty/2}$, где пространство $\Lambda_c^{\infty/2}$ порождено всеми v_M, где M — полуконечное множество заряда c. В частости, базис в $\Lambda_0^{\infty/2}$ составляют векторы $v_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} v_{M_\lambda} = \dots v_{-s-1} \wedge v_{\lambda_s - s} \wedge \dots \wedge v_{\lambda_1 - 1}$.

На пространстве Фока действует, для произвольного $k \in \mathbb{Z}$, линейный оператор z_k (“добавление электрона в состоянии k”). Неформально говоря, он действует на базисные векторы как $v_M \mapsto v_M \wedge z_k$, где $\wedge$ — кососимметрическое умножение; формально если $k \in M$, то $z_k v_M = 0$, а если $k \notin M$, то $z_k v_M = (-1)^a v_{M\cup k}$, где $a = \#\{m \in M \mid m > k\}$. Аналогично, есть линейный оператор $\frac{\partial}{\partial z_k}$ (“добавление позитрона в состоянии k”), для которого $\frac{\partial}{\partial z_k} v_M = 0$, если $k \notin M$, и $\frac{\partial}{\partial z_k} v_M = (-1)^a v_{M\setminus\{k\}}$ (a то же самое). Оператор z_k увеличивает заряд на 1, а $\frac{\partial}{\partial z_k}$ — уменьшает на 1.

Напомним, что коммутатором линейных операторов A и B называется выражение $[A, B] = AB - BA$, а антикоммутатором — выражение $\{A, B\} = AB + BA$.

Теорема 1. *1) Антикоммутаторы $\{z_k, z_\ell\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_\ell}\}$ равны нулю при $k \neq \ell$. Антикоммутатор $\{z_k, \frac{\partial}{\partial z_\ell}\}$ равен нулю при $k \neq \ell$ и является тождественным оператором на $\Lambda^{\infty/2}$, если $k = \ell$.*

2) Для произвольного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ оператор $a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_{m+k} \frac{\partial}{\partial z_m}$ корректно определен (т.е. его действие на произвольный базисный вектор содержит только конечное число ненулевых членов).

3) $[a_k, z_\ell] = z_{\ell+k}$, $[a_k, \frac{\partial}{\partial z_\ell}] = -\frac{\partial}{\partial z_{\ell-k}}$.

4) Коммутатор $[a_k, a_\ell]$ равен 0 при $k + \ell \neq 0$ и равен $k\,\mathrm{Id}$ при $k = -\ell > 0$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 очевидны; доказательство пункта 3 — прямая проверка. Для доказательства пункта 4 заметим, что $[[a_k, a_\ell], z_m] = -[[a_\ell, z_m], a_k] - [[z_m, a_k], a_\ell]$ (по тождеству Якоби) $= -[z_{m+\ell}, a_k] + [z_{m+k}, a_\ell]$ (в силу пункта 1 $= -z_{m+\ell+k} + z_{m+k+\ell} = 0$, и аналогично $[[a_k, a_\ell], \frac{\partial}{\partial z_m}] = 0$ для всех m. Как нетрудно заметить (докажите!), пространство $\Lambda^{\infty/2}$ как представление алгебры, порожденной операторами z_m и $\frac{\partial}{\partial z_m}$, $m \in \mathbb{Z}$, неприводимо (т.е. не существует собственного подпространства $L \subset \Lambda^{\infty/2}$, инвариантного относительно всех z_m и $\frac{\partial}{\partial z_m}$); теперь из леммы Шура вытекает, что операторы $[a_k, a_\ell] = c_{k,\ell}\,\mathrm{Id}$ для всех k, ℓ, где $c_{k,\ell}$ — некоторые константы.

Назовем *энергией* множества $M \subset \mathbb{Z}$ число $E(M) = \sum_{i\geq 0, i\in M} i - \sum_{i<0, i\notin M} i \in \mathbb{Z}$ и обозначим $\mathcal{L}_e \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_M \mid E(M) = e\rangle \subset \Lambda^{\infty/2}$. Нетрудно видеть, что $E(a_k v_M) \in \mathcal{L}_{E(M)+k}$. Поскольку оператор Id переводит каждое подпространство $\mathcal{L}_e$ в себя, получим $c_{k.\ell} = 0$ при $k + \ell \neq 0$.

Если $k = -\ell > 0$, то имеем $a_{-k} v_\varnothing = 0$ и $a_k v_\varnothing = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i v_{(k-i)1^1 i}$, откуда $[a_k, a_{-k}] v_\varnothing = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a_{-k} v_{(k-i)1^1 i} = k v_\varnothing$ и, следовательно, $c_{k,-k} = k$. □

Заметим, что $E(M_\lambda) = |\lambda|$ для произвольного разбиения λ.

Будем обозначать символом p совокупность переменных $p_1, p_2, \dots$; для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ также обозначим $p_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}$. Для произвольного многочлена $R \in \mathbb{C}[p]$ обозначим $\mathcal{B}(R) \stackrel{\text{def}}{=} R(a_1, a_2, \dots) v_\varnothing \in \Lambda_0^{\infty/2}$; полученное отображение $\mathcal{B} : \mathbb{C}[p] \to \Lambda_0^{\infty/2}$ называется бозон-фермионным соответствием.

Следствие 1 (теоремы 1). *Для произвольного многочлена $R \in \mathbb{C}[p]$ и всякого $k > 0$ имеет место равенство $[a_{-k}, R(a_1, a_2, \dots)] = k \frac{\partial R}{\partial p_k}(a_1, a_2, \dots)$.*

Доказательство. Операция коммутирования — дифференцирование алгебры операторов (т.е. $[A, BC] = B[A, C] + C[A, B]$ — проверяется непосредственно). Тем самым $R \mapsto [a_k, R(a_1, a_2, \dots)]$ и $R \mapsto k\frac{\partial R}{\partial a_k}$ — два дифференцирования алгебры многочленов от переменных $p_1, p_2, \ldots$. Согласно утверждению 4 теоремы 1, эти дифференцирования совпадают на многочленах $R_k = p_k$. Индукцией по степени многочлена убеждаемся, что они в этом случае совпадают на всех многочленах. $\square$

Теорема 2. *Бозон-фермионное соответствие – изоморфизм векторных пространств: для произвольного вектора $v \in \Lambda_0^{\infty/2}$ существует единственный многочлен $R \in \mathbb{C}[p]$ такой, что $R(a_1, a_2, \ldots)v_\varnothing = v$.*

Доказательство. Докажем, что бозон-фермионное соответствие не имеет ядра. Действительно, пусть $R \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, т.е. $R(a_1, a_2, \ldots)v_\varnothing = 0$. При $k > 0$ имеем, очевидно, $a_{-k}v_\varnothing = 0$. Из следствия 1 вытекает, что $\frac{\partial R}{\partial p_k} \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ для произвольного k. Следовательно, ядро $\mathcal{B}$ содержит наряду с любым своим элементом все его частные производные всех порядков, откуда вытекает, что оно содержит также многочлен-константу, что неверно. Следовательно, ядро нулевое.

Обозначим $\mathcal{L}_{n,0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_n \cap \Lambda_0^{\infty/2}$ (подпространство, порожденное векторами энергии n и заряда 0). Поскольку $\Lambda_0^{\infty/2} = \langle v_\lambda \rangle$ и $E(M_\lambda) = |\lambda|$, имеем $\dim \mathcal{L}_{n,0} = \{\lambda \mid |\lambda| = n\} = p(n)$ (число разбиений числа n). Поскольку, $a_k\mathcal{L}_{n,0} \subseteq \mathcal{L}_{n+k,0}$, откуда вытекает, что $\mathcal{B}(R) \in A_n$, если $R \in \mathbb{C}[p]$ — однородный многочлен взвешенной степени n, где взвешенная степень переменной p_k считается равной k ($k = 1, 2, \ldots$). Размерность подпространства многочленов взвешенной степени n равна $p(n)$ (докажите!), то есть размерности $\mathcal{L}_{n,0}$, откуда вытекает, что $\mathcal{B}$ — биекция. $\square$

Теорема 3. *1) Оператор $F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^\infty (a_{i+j}a_{-i}a_{-j} + a_i a_j a_{-i-j}) : \Lambda_0^{\infty/2} \to \Lambda_0^{\infty/2}$ корректно определен и переходит при бозон-фермионном соответствии в оператор cut-and-join на пространстве многочленов $\mathbb{C}[p]$.*

2) Собственными векторами оператора F являются базисные векторы v_λ и только они. Собственное значение вектора v_λ равно $F_2(\lambda) = \sum_{i=1}^s \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$.

Доказательство. По теореме 2 всякий вектор $v \in \Lambda_0^{\infty/2}$ однозначно представим в вмде $v = \mathcal{B}(R)$ для некоторого $R \in \mathbb{C}[p]$. Имеем, согласно следствию 1, $F\mathcal{B}(R) = \frac{1}{2}\sum_{i,j \geq 1} a_i a_j (i+j)\mathcal{B}(\frac{\partial R}{\partial p_{i+j}}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 0} a_{i+j} ij \mathcal{B}(\frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial p_j}) = \mathcal{B}(A(R))$, где A — оператор cut-and-join.

Доказательство утверждения 2 — задача для размышления. $\square$

Многочлены $s_\lambda(p)$ такие, что $\mathcal{B}(s_\lambda) = v_\lambda$, называются многочленами Шура. Согласно теореме 3, эти многочлены — собственные функции оператора cut-and-join.

Приведем теперь альтернативное описание многочленов Шура. Напомним, что групповой алгеброй группы G называется алгебра $\mathbb{C}[G]$, порожденная как векторное пространство группой G и с билинейным умножением, заданном на базисе как $g \cdot h = gh$ (в правой части — умножение в группе G, в левой — в групповой алгебре). Вот основные свойства групповой алгебры:

1) Центр групповой алгебры $Z\mathbb{C}[G]$ порожден (как векторное пространство) элементами $u_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \sigma$, где C_λ — класс сопряженности в группе G. Размерность $Z\mathbb{C}[G]$ равна количеству классов совпряженности.
2) Пусть V — произвольное конечномерное представление группы G, и $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ — характер этого представления (т.е. $\chi_V(\sigma) = \operatorname{Tr}\sigma_V$, где $\sigma_V : V \to V$ — оператор, представляющий элемент $\sigma \in G$ в представлении V). Тогда элементы $\tau_V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi_V(\sigma)\sigma$ принадлежат $Z\mathbb{C}[G]$ и удовлетворяют равенствам $\tau_V^2 = \tau_V$ и $\tau_V\tau_W = 0$, если V и W — неизоморфные неприводимые представления G.
3) Если V — конечномерное неприводимое представление G, то подпространство $\tau_V\mathbb{C}[G]$ имеет размерность $\dim^2 V$ и инвариантно относительно умножения на элементы $\sigma \in G$ (то есть является идеалом в групповой алгебре). Как G-модуль оно является прямой суммой $\dim V$ копий представления V.

Доказательства этих утверждений см. в любом курсе теории представлений. Как следствие, получим, что количество попарно неизоморфных неприводимых представлений конечной группы равно количеству классов сопряженности в этой группе, а сумма квадратов размерностей этих представлений равна порядку группы.

Отметим, что если $G = S_n$, то каждый класс сопряженности состоит из перестановок фиксированного циклического типа λ, $|\lambda| = n$. Неприводимые представления S_n также нумеруются разбиениями λ; центральный идемпотент τ_V, где V — представление, соответствующее разбиению λ, будем обозначать τ_λ.

Пусть теперь $Q \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_n Z\mathbb{C}[S_n]$; в Q введем структуру алгебры, полагая по определению $u_\lambda \cdot u_\mu = u_{\lambda\cup\mu}$; здесь λ, μ — разбиения, а $u_\lambda \in Z\mathbb{C}[S_{|\lambda|}]$ и аналогично u_μ — базис, упомянутый в свойстве 1. Очевидно, $|\lambda \cup \mu| = |\lambda| + |\mu|$, так что алгебра получается градуированной по n.

Теорема 4. *1) Алгебра Q порождена элементами $p_n \stackrel{\text{def}}{=} u_{(n)} \in Z\mathbb{C}[S_n]$ (суммы циклических перестановок) и изоморфна алгебре многочленов $\mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots]$.*

2) Если $x \in Z\mathbb{C}[S_n]$ соответствует при этом изоморфизме многочлену $R \in \mathbb{C}[p]$, то $u_{(2^1 1^{n-2})} x \in Z\mathbb{C}[S_n]$ соответствует AR, где A — оператор cut-and-join. (Здесь умножение — это умножение в алгебре $Z\mathbb{C}[S_n]$, а не в алгебре Q!)

3) Собственными векторами оператора умножения на $u_{(2)}$ являются идемпотенты $\tau_\lambda \in Z\mathbb{C}[S_n]$, где λ — конечномерные неприводимые представления группы S_n, то есть разбиения, для которых $|\lambda| = n$.

4) При изоморфизме между Q и $\mathbb{C}[p]$ идемпотент τ_λ переходит в $\dim\lambda \cdot s_\lambda$, где s_λ — многочлен Шура, а $\dim\lambda$ — размерность неприводимого представления группы перестановок, соответствующего разбиению λ.

5) Собственное значение собственного вектора τ_λ, где $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s)$, равно $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$.

Доказательство. 1. Произвольный элемент $u_{\lambda_1,\dots,\lambda_s} = p_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot p_{\lambda_s}$; поскольку u_λ составляют базис в Q, эта алгебра порождена $p_1, p_2, \dots$.

2. Доказательство — упражнение.

3. Элемент $u_{(2^1 1^{n-2})}$ — центральный. Согласно свойству 3 групповой алгебры и лемме Шура оператор умножения на $u_{(2^1 1^{n-2})}$ действует в представлении $\tau_\lambda \mathbb{C}[S_n]$ умножением на константу $\mathcal{F}_\lambda$. В частности, $u_{(2^1 1^{n-2})}\tau_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \tau_\lambda$.

Доказательство утверждений 4 и 5 — задачи для размышления. □

Пусть теперь $x = (x_1, x_2, \dots)$ — бесконечный набор переменных, и пусть $p_k(x) = x_1^k + x_2^k + \dots$. Обозначим теперь $q_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} s_\lambda(p_1(x), p_2(x), \dots)$; это симметрические многочлены от бесконечного набора переменных $x_1, x_2, \dots$. (Неудачным образом, q_λ в литературе часто также называют многочленами Шура и даже обозначают $s_\lambda(x)$, в отличие от введенных ранее многочленов, которые обозначают $s_\lambda(p)$.)

Лемма 1 (детерминантная формула и формула Коши для многочленов Шура)**.**

1) Для произвольного $N \geq s \stackrel{def}{=} \#\lambda$ имеет место равенство

$$q_\lambda(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+N-1} & \dots & x_N^{\lambda_1+N-1} \\ x_1^{\lambda_2+N-2} & \dots & x_N^{\lambda_2+N-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\lambda_N} & \dots & x_N^{\lambda_N} \end{pmatrix};$$

при этом полагают по определению $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_N = 0$.

2) $\sum_\lambda q_\lambda(x) q_\lambda(y) = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i y_j}$, где $y = (y_1, y_2, \dots)$ и суммирование производится по всем разбиениям λ.

Доказательство леммы — задача для размышления.

Следствие 2. $\sum_\lambda s_\lambda(p) s_\lambda(q) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k q_k}{k})$.

Доказательство. Выразим в формуле Коши q_λ через многочлены Шура: $\sum_\lambda s_\lambda(p(x)) s_\lambda(p(y)) = \exp(-\sum_{i,j=1}^{\infty} \ln(1 - x_i y_j)) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{x_i^k y_j^k}{k}) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x) p_k(y)}{k})$. Как нетрудно видеть, для произвольного набора $p_1, p_2, \dots$ найдется такое x, что $p_k(x) = p_k$. Тем самым в полученном тождестве можно считать $p_k = p_k(x)$ и $q_k = q_k(y)$ независимыми переменными, получая требуемое тождество. □

Напомним (лекция 10), что производящая функция $e^H = \sum_{m,\lambda} \widetilde{h}_{m,\lambda} \frac{p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}}{s!} \frac{\beta^m}{m!}$ для чисел Гурвица несвязных факторизаций удовлетворяет уравнению cut-and-join $\frac{\partial e^H}{\partial \beta} = A e^H$. Положим $\beta = 0$. Поскольку $H(\beta, p) = \sum_{g,\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_s)} h_{g,\lambda} \frac{p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}}{s!} \frac{\beta^{m(g,\lambda)}}{m(g,\lambda)!}$, выражение $H(0,p)$ содержит только члены, в которых $m(g,\lambda) = 2g - 2 + \#\lambda + |\lambda| = 0$, что возможно только при $g = 0$ и $\lambda = (1)$. Тем самым $H(0,p) = p_1$ (соответствующее число Гурвица, очевидно, равно 1). Полагая в следствии 2 $q_1 = 1$ и $q_k = 0$ при $k > 1$, получим $e^H(0,p) = e^{p_1} = \sum_\lambda s_\lambda(1, 0, \dots) s_\lambda(p)$. Поскольку функции Шура являются собственными векторами оператора A с собственными значениями $F_2(\lambda)$, получаем

$$e^H = \sum_\lambda s_\lambda(1, 0, \dots) e^{\beta F_2(\lambda)} s_\lambda(p).$$

Получим теперь представление $e^H(0,p)$ в виде линейной комбинации функций Шура другим способом. Применим теперь к функции e^{p_1} изоморфизм между $\mathbb{C}[p]$ и алгеброй $Q = \bigoplus_n Z\mathbb{C}[S_n]$, описанный выше. Однородная компонента степени n, равная $\frac{1}{n!} p_1^n$, переходит при этом изоморфизме в элемент $\frac{1}{n!} e_n$, где $e_n \in S_n$ — единичный элемент, а функция Шура s_λ (где $|\lambda| = n$) — в $\frac{1}{\dim\lambda} \tau_\lambda$, где τ_λ — идемпотент, соответствующий представлению λ; положим $\frac{1}{n!} e_n = \sum_{|\lambda|=n} f_\lambda \tau_\lambda$. Изотипическая компонента R_λ алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, соответствующая представлению λ (т.е. сумма всех подпредставлений $\mathbb{C}[S_n]$, изоморфных λ) содержит $\dim\lambda$ таких представлений и имеет размерность $\dim^2\lambda$, откуда вытекает, что $\mathrm{Tr}_{R_\lambda} \frac{1}{n!} e_n = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$. Идемпотент τ_λ действует в этой компоненте тождественным отображением, а идемпотенты τ_μ, соответствующие всем остальным представлениям $\mu \neq \lambda$ группы S_n — нулем; отсюда $\frac{1}{n!}e_n = \frac{1}{n!}\sum_\lambda \tau_\lambda$. Следовательно, $e^{p_1} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{|\lambda|=n} \frac{\dim\lambda}{n!} s_\lambda(p)$. Сравнивая этот результат со следствием 2, получаем, что размерность $\dim\lambda$ неприводимого представления S_n, соответствующего разбиению λ, равна $n! s_\lambda(1, 0, \dots)$.