ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Матричная теорема о деревьях как следствие формулы Коши–Бине.

Возьмем в условиях теоремы Коши–Бине $e_{ij} = u_i - u_j$ и $\alpha_{ij} = u_j$, где $1 \le i \ne j \le n$ (и таким образом $N = n(n-1)$), а $u_1, \dots, u_n$, как и раньше, — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Многочлен P линейный: $P = \sum_{1 \le i \ne j \le n} w_{ij} x_{ij}$, с произвольными w_{ij}. Нетрудно видеть, что матрица оператора $M = P(M[e_{11}, \alpha_{11}], \dots, M[e_{nn}, \alpha_{nn}])$ в этом случае устроена так: при $i \ne j$ матричный элемент (i,j) (внедиагональный) равен $-w_{ij}$, а матричный элемент (i,i) (диагональный) равен $\sum_{j \ne i} w_{ij}$. Такая матрица называется матрицей Лапласа.

Формула Коши–Бине для коэффициента μ_k при $n-k$-й степени в характеристическом многочлене в случае многочлена P дает:

$$\mu_k = \sum_F w_{i_1 j_1} \dots w_{i_k j_k} \det A(F),$$

где F — ориентированный граф с вершинами $1, \dots, n$ и ребрами $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$, а $A(F)$ — матрица с матричными элементами $(u_{j_p}, u_{i_q} - u_{j_q})$, $p, q = 1, \dots, k$. Пусть в графе F имеется цикл (не обязательно ориентированный!), образованный вершинами $i_1, \dots, i_s$. Каждой паре соседних вершин в цикле соответствует либо вектор $e_{i_k i_{k+1}} = u_{i_k} - u_{i_{k+1}}$, либо вектор $e_{i_{k+1} i_k} = -e_{i_k i_{k+1}}$, в зависимости от ориентации ребра. Тогда сумма векторов вдоль цикла с соответствующими знаками дает $(u_{i_2} - u_{i_1}) + (u_{i_3} - u_{i_2}) + \dots + (u_{i_s} - u_{i_1}) = 0$. Тем самым в матрице $A(F)$ сумма нескольких столбцов со знаками равна нулю, так что $\det A(F) = 0$. Отсюла вытекает, что вклад μ_k дают только графы F без циклов, т.е. леса с k ребрами.

Пусть теперь в графе F имеется вершина j, в которую входит два ребра, (i_1, j) и (i_2, j). Тогда $\alpha_{i_1 j} = \alpha_{i_2 j} = u_j$, так что в матрице $A(F)$ имеется две одинаковых строки, и $\det A(F) = 0$. Тем самым вклад в μ_k вносят только *ориентированные* леса F, т.е. ориентированные графы без циклов, где каждая вершина является либо источником (в нее не входит ни одного ребра), либо в нее входит ровно одно ребро.

Сопоставляя ребру d ориентированного леса вершину d^+, в которую оно входит, мы тем самым получим инъекцию множества ребер в множество вершин. Поскольку в каждой компоненте связности леса должен быть хотя бы один источник (ввиду отсутствия ориентированных циклов), а количество ребер в лесе равно $n - \beta_0(G)$, в каждой компоненте связности ориентированного леса есть *ровно* один источник.

Пусть F — ориентированный лес, содержащий ребра (ij) и (jk). Если заменить ребро (jk) на ребро (ik), то полученный граф F' также будет ориентированным лесом. Поскольку $e_{ik} = u_i - u_k = u_i - u_j + u_j - u_k = e_{ij} + e_{jk}$, матрица $A(F')$ получается из $A(F)$ элементарным преобразованием — один из столбцов заменяется на сумму себя и другого столбца. Отсюда вытекает, что $\det A(F') = \det A(F)$. Повторяя такое преобразование, можно превратить любой ориентированный лес в набор "кустов" — графов, в которых вершина-источник соединена ребрами со всеми остальными вершинами (и больше ребер нет). Для "куста" $A(F) = I$ и $\det A(F) = 1$. Отсюда вытекает

Теорема 1 (матричная теорема о деревьях). *Коэффициент μ_k характеристического многочлена матрицы M равен $(-1)^{n-k} \sum w_{i_1 j_1} \dots w_{i_k j_k}$, где сумма берется по всем наборам $(i_1 j_1), \dots, (i_k j_k)$ таким, что граф с вершинами $1, \dots, n$ и ребрами $(i_1 j_1), \dots, (i_k j_k)$ — ориентированный лес.*