ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Дискретные линейные расслоения со связностью и метрикой.

Дискретным линейным расслоением со связностью и метрикой называется следующая ситуация. Имеется неориентированный граф с вершинами $1,\dots,n$ и без петель; параллельные ребра разрешаются (две вершины могут быть соединены более чем одним ребром). Каждому ребру d сопоставим вес $c_d \in \mathbb{R}$. В каждой вершине i графа поместим одномерное векторное пространство V_i. Для каждого ребра d с выбранной ориентацией, соединяющего вершины i и j, зададим обратимый линейный оператор $\varphi_d : V_i \to V_j$ (то есть ненулевое число), называемый оператором параллельного переноса вдоль ребра d. Число φ_d зависит от ориентации ребра и меняется на обратное ($1/\varphi_d$) при смене ориентации. Если $d_1, d_2, \dots, d_m$ — ребра, образующие путь Λ в графе (так что $d_1 = (i_1, i_2)$, $d_2 = (i_2, i_3)$ и т.д.), величина $\varphi_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{d_1} \dots \varphi_{d_m}$ (композиция операторов параллельного переноса) называется оператором переноса φ_Λ вдоль пути Λ; если путь это ориентированный цикл — то голономией. При смене ориентации цикла голономия меняется на обратную.

Пусть $u_1,\dots,u_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Вектор $v = \sum_{i=1}^n v_i u_i \in \mathbb{R}^n$ будем понимать как сечение дискретного линейного расслоения ($v_i \in \mathbb{R} = V_i$ — значение сечения в вершине i). Оператор Лапласа $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\Delta(v) = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{d=(i,j)} c_d(v_i - \varphi_d^{-1} v_j).$$

Иными словами, значение сечения $\Delta(v)$ в вершине i равно сумме по всем ребрам, у которых i является одним из концов; слагаемое равно весу ребра, умноженному на разность значения в вершине i самого сечения v и значения, перенесенного с помощью оператора параллельного переноса из вершины j на другом конце ребра.

Оператор Лапласа можно получить с помощью конструкции Коши–Бине из лекции 4 следующим образом. Пусть N — число ребер в графе. Ориентируем ребра произвольным образом (от выбора ориентации окончательный результат не зависит); каждому ребру d, соединяющему вершины i и j, сопоставим $\alpha_d = u_i - \varphi_d u_j$ и $e_d = u_i - \varphi_d^{-1} u_j$. Положим $P(x_1,\dots,x_N) = \sum_d c_d x_d$; несложное вычисление показывает (проделайте!), что $P(M_{\alpha_1,e_1},\dots,M_{\alpha_N,e_N}) = \Delta$ (здесь предполагается, что $u_1,\dots,u_n$ — ортонормированный базис).

Теперь коэффициенты характеристического многочлена Δ равны

$$\mu_k = \sum_F c_{d_1} \dots c_{d_k} \det A(F),$$

где F — ориентированный граф с вершинами $1,\dots,n$ и ребрами $d_1,\dots,d_k$, а матрица $A(F)$ состоит из элементов (α_{d_p}, e_{d_q}), $p,q = 1,\dots,k$. Такую матрицу мы обозначим $G(\alpha_{d_1},\dots,\alpha_{d_k}; e_{d_1},\dots,e_{d_k})$ (*матрица Грама*).

Пусть граф F содержит ребра (i,j) и (j,ℓ), им соответствуют ковекторы $\alpha_{ij} = u_i - \varphi_{ij} u_j$ и $\alpha_{j\ell} = u_j - \varphi_{j\ell} u_\ell$ и векторы $e_{ij} = u_i - \varphi_{ji} u_j$ и $e_{j\ell} = u_j - \varphi_{\ell j} u_\ell$. Заменим α_{jl} на $\alpha'_{j\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{ij} + \varphi_{ij}\alpha_{j\ell} = u_i - \varphi_{ij}\varphi_{j\ell} u_\ell$, а $e_{j\ell}$ — на $e'_{j\ell} \stackrel{\text{def}}{=} e_{ij} + \varphi_{ji} e_{j\ell} = u_i - \varphi_{ji}\varphi_{\ell j} u_\ell$. Тогда получится $\det G(\dots,\alpha_{ij},\alpha'_{j\ell},\dots;\dots,e_{ij},e'_{j\ell},\dots) = \varphi_{ij}\varphi_{ji} \det G(\dots,\alpha_{ij},\alpha_{j\ell},\dots;\dots,e_{ij},e_{j\ell},\dots) = \det A(F)$.

Аналогично, если граф F содержит путь Λ, состоящий из ребер $d_1 = (i_1,i_2), d_2 = (i_2,i_3),\dots,d_m = (i_m,i_{m+1})$, соединяющий вершину u_1 с вершиной u_{m+1}, то, повторяя эту конструкцию m раз, можно заменить α_{d_m} и e_{d_m} на $\alpha'_{d_m} = u_1 - \varphi_\Lambda u_{m+1}$ и $e'_{d_m} = u_1 - \varphi_\Lambda^{-1} u_{m+1}$, и при этом опять же $\det G(\dots,\alpha_{ij},\alpha'_{j\ell},\dots;\dots,e_{ij},e'_{j\ell},\dots) = \det A(F)$.

Пусть граф F состоит из компонент связности $F_1,\dots,F_s$. Если ребра d_1 и d_2 относятся к разным компонентам, то $(\alpha_{d_1}, e_{d_2}) = 0$; таким образом, матрица $A(F)$ — блочно-диагональная с блоками $A(F_1),\dots,A(F_s)$. Тем самым достаточно вычислить $\det A(F)$ для связных графов F.

Пусть граф F — дерево. Выберем одну вершину — корень (без ограничения общности это вершина 1). Каждую из оставшихся вершин $p = 2,\dots,n$ соединим кратчайшим путем Λ_p (в дереве он единственный) с корнем; последнее ребро в этом пути обозначим d_p. Согласно сказанному выше, заменим для всех p ковектор α_{d_p} на $\alpha'_{d_p} = u_1 - \Lambda_p u_s$, а вектор e_{d_p} — на $e'_p = u_1 - \Lambda_p^{-1} u_s$, и при этом если $B(F) \stackrel{\text{def}}{=} G(\alpha'_{d_2},\dots,\alpha'_{d_n}; e'_{d_2},\dots,e'_{d_n})$, то $\det B(F) = \det A(F)$. Диагональные элементы матрицы $B(F)$ равны $(\alpha'_{d_p}, e'_{d_p}) = 2$, а внедиагональные ($p \ne q$) равны $(\alpha'_{d_p}, e'_{d_q}) = 1$. Иными словами $B(F) = I + Q$, где I — единичная матрица, а Q — матрица, в которой все матричные элементы равны 1.

Пусть $R(x) = \det(xI + Q)$. Поскольку $\operatorname{rk} Q = 1$, число $x = 0$ является корнем многочлена R кратности $n-1$. Кроме того, как нетрудно видеть, число $x = -n+1$ также является корнем R (у матрицы $(1-n)I+Q$ сумма всех строк равна 0, и поэтому она вырожденная). Отсюда вытекает, что $R(x) = x^{n-1}(x+n-1)$, и $\det A(F) = \det B(F) = R(1) = n$ (количеству вершин) для произвольного дерева F.

Пусть теперь F — связный граф с n вершинами и n ребрами. Такой граф представляет собой цикл Λ (без ограничения общности, в него входят вершины $1, \dots, m$ и ребра $d_1 = (12), d_2 = (23), \dots, d_m = (m1)$), к каждой вершине которого прикреплено дерево (возможно, пустое). Пусть F' — граф F без ребра d_m; он является деревом. Заменим матрицу $A(F)$ на матрицу $B(F) = G(\alpha'_{d_1}, \dots, \alpha'_{d_{m-1}}, \alpha_{d_m}, \alpha'_{d_{m+1}}, \dots; e'_{d_1}, \dots, e'_{d_{m-1}}, e_{d_m}, e'_{d_{m+1}}, \dots)$, где конструкция α' и e' описана выше (применяется к дереву F'); тогда $\det B(F) = \det A(F)$.

Заменим теперь вектор $\alpha_{d_m} = u_m - \varphi_{m1} u_1$ на $\alpha'_{d_m} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{d_m} + \varphi_{\Lambda_m} \alpha'_{d_1} = (1-\varphi_\Lambda) u_1$, а e_{d_m}, соответственно, на $e'_{d_m} = (1-\varphi_\Lambda^{-1}) u_1$ (напомним, что Λ — единственный цикл в графе F, а Λ_m — путь $12\dots m$, соединяющий вершины 1 и m в графе F'); очевидно, $\det G(\alpha'_{d_1}, \dots, \alpha'_{d_n}; e'_{d_1}, \dots, e'_{d_n}) = \det B(F) = \det A(F)$. Теперь заменим при $p \neq m$ произвольный ковектор $\alpha'_{d_p} = u_1 - \varrho_p u_p$ на $\alpha''_{d_p} = \alpha'_{d_p} - (1-\varphi_\Lambda)^{-1} \alpha'_{d_m} = -\varrho_p u_p$, а $e'_{d_p} = u_1 - \varrho_p^{-1} u_p$, аналогично, на $e''_{d_p} = -\varrho_p^{-1} u_p$. Очевидно, если $C(F) = G(\alpha''_{d_1}, \dots, \alpha''_{d_{m-1}}, \alpha'_{d_m}, \alpha''_{d_{m+1}}, \dots, \alpha''_{d_n}; e''_{d_1}, \dots, e''_{d_{m-1}}, e'_{d_m}, e''_{d_{m+1}}, \dots, e''_{d_n})$, то $\det C(F) = \det B(F) = \det A(F)$.

Матрица $C(F)$ диагональная: в верхнем углу ее стоит $((1-\varphi_\Lambda)u_1, (1-\varphi_\Lambda^{-1})u_1) = (1-\varphi_\Lambda)(1-\varphi_\Lambda^{-1})$, а в остальных местах на диагонали стоит 1. Следовательно, $\det A(F) = (1-\varphi_\Lambda)(1-\varphi_\Lambda^{-1})$ (напомним, что φ_Λ — голономия единственного цикла в графе).

Если граф F связный и не является ни деревом, ни уникциклом, то $k > n$ (где k — количество ребер, а n — вершин). Векторы $e_{d_1}, \dots, e_{d_k}$ принадлежат $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, линейно зависимы, откуда $\det A(F) = 0$.

Тем самым доказана

Теорема 1 (Форман)**.** *Характеристический многочлен оператора Лапласа на дискретном линейном расслоении с метрикой c_d и связностью φ_d равен $\sum_{k=0}^n (-1)^k \mu_k t^{n-k}$, где*

$$\mu_k = \sum_{F = F_1 \sqcup \dots \sqcup F_m} \prod_{d \in E(F)} c_d \prod_{i=1}^m \delta(F_i). \tag{1}$$

Суммирование здесь производится по множеству графов F с k ребрами, состоящих из компонент связности $F_1, \dots, F_m$; каждая компонента связности F_i — либо дерево, либо уницикл. При этом $\delta(F_i) = n_i$ (где n_i — количество вершин в компоненте F_i), если F_i — дерево, и $\delta(F_i) = (1-\varphi_{\Lambda_i})(1-\varphi_{\Lambda_i}^{-1})$, если F_i — уницикл с циклом Λ_i.

Упражнение 2. Пусть $1 \le p < q \le n$; обозначим $(pq) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ оператор, переводящий базисные векторы u_p и u_q (стандартного ортонормированного базиса $u_1, \dots, u_n$) друг в друга, а остальные базисные векторы — в себя. Также обозначим Λ диагональный оператор, переводящий u_i в $\lambda_i u_i$, $i = 1, \dots, n$. *Дискретным оператором Шредингера* называется оператор $H = \sum_{1 \le p < q \le n} (1 - (pq)) + \Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. а) Докажите формулу $\operatorname{char}_H(t) = \sum_{k=0}^n \sum_F \prod_{i=1}^{n-k} (t + \lambda_{p_i(F)})$, где суммирование производится по множеству лесов F с вершинами $1, \dots, n$ и k ребрами (и, следовательно, $n-k$ компонентами связности) с отмеченной вершиной $p_i(F)$, $i = 1, \dots, n-k$, в каждой компоненте. б) Вычислите характеристический многочлен оператора $\sum_{1 \le p < q \le n} w_{pq}(1 - (pq)) + \Lambda$ для произвольного набора весов w_{pq}, $1 \le p < q \le n$.

Указание. См. Yurii Burman, Andrey Ploskonosov, Anastasia Trofmova, *Matrix-tree theorems and discrete path integration*, Linear Algebra and Applications, 466(2015), pp. 64–82.

Упражнение 3. Пусть G — неориентированный граф без петель с вершинами $1, \dots, n$, и пусть $L(G)$ — его матрица Лапласа: матричный элемент на месте (i,j), $i \neq j$, равен количеству ребер, соединяющих вершиины i и j, а матричный элемент на месте (i,i) равен валентности вершины i (количеству ребер с концом i), взятой со знаком минус. а) Докажите, используя матричную теорему о деревьях, что все диагональные миноры размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы $L(G)$ равны друг другу и равны количеству подграфов-деревьев $F \subset G$. б) Пусть e — ребро графа G. Докажите, не используя результат пункта 3а, что диагональный минор $M(G)$ размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы Лапласа удовлетворяет соотношению $M(G) = M(G \setminus e) + M(G/e)$. в) Выведите из пункта 3б, что $M(G) = T_G(1,1)$, где T_G — многочлен Татта графа G. Из этого и из теоремы о том, что $T_G(1,1)$ — количество подграфов-деревьев $F \subset G$, вытекает, что $M(G)$ равен количеству таких подграфов.