ЛЕКЦИИ 7–8

Краткое содержание. Целые точки в многогранниках: двойственность Эрхарта–Макдональда и теорема Бриона.

Решеточным многогранником $P \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного числа точек (вершин) $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}^n$. Мы будем предполагать, что P имеет полную размерность, т.е. не лежит ни в каком собственном аффинном подпространстве в $\mathbb{R}^n$. Конусом над P называется множество $C_P = \{(tv_1, \dots, tv_n) \in \mathbb{R}^n \mid t(v_1, \dots, v_n) \in P\}$, а расширенным конусом — множество $\widehat{C}_P = \{(t, tv_1, \dots, tv_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (v_1, \dots, v_n) \in P\}$, то есть конус над $\{1\} \times P \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Теорема 1 (Эрхарт)**.** *Для всякого решеточного многогранника M существует многочлен $\mathcal{E}_M \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что для всякого $k = 1, 2, \dots$ верно равенство $\mathcal{E}_M(k) = \#\{kM \cap \mathbb{Z}^n\}$ (количеству точек с целыми координатами в многограннике $kM \stackrel{\text{def}}{=} \{kv \mid v \in M\}$, полученном растяжением M в k раз от начала координат).*

Доказательство теоремы опирается на несколько лемм.

n-мерным симплексом $\Sigma(a_0, \dots, a_n)$ назовем выпуклую оболочку точек $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, имеющую полную размерность. Гранью n-мерного симплекса называется выпуклая оболочка любого непустого подмножества $B \subset \{a_0, \dots, a_n\}$.

Лемма 1. *Всякий n-мерный выпуклый многогранник может быть триангулирован, т.е. является объединением n-мерных симплексов, вершины которых — вершины многогранника, и пересечение любых двух симплексов триангуляции либо пусто, либо является гранью (произвольной размерности) каждого из них.*

Доказывать эту лемму мы не будем, см. многочисленную литературу по выпуклой геометрии.

Для произвольного базиса $a_1, \dots, a_n \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $C(a_0, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0\}$ (симплициальный конус с образующими $a_1, \dots, a_n$). Назовем $x \in \mathbb{R}^n$ точкой общего положения относительно базиса $a_1, \dots, a_n$, если $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, где $\alpha_i \neq 0$ для всех i. Обозначим $I_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : \alpha_i > 0\}$ и $I_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : \alpha_i < 0\}$ и рассмотрим следующие подмножества конуса $C(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{R}^n$:

$$C_{a_1,\dots,a_n}[x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n \mid \mu_i \geq 0, \text{ если } i \in I_+(x),\ \mu_i > 0, \text{ если } i \in I_-(x)\}$$

и

$$C_{a_1,\dots,a_n}(x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n \mid \mu_i > 0, \text{ если } i \in I_+(x),\ \mu_i \geq 0, \text{ если } i \in I_-(x)\}.$$

Лемма 2. *Пусть $M = \bigcup_i S_i$ — триангуляция решеточного многогранника, и $x \in \{1\} \times M$ — точка в общем положении по отношению ко всем $\{1\} \times S_i$ (т.е. по отношению к базису, составленному из векторов $\{1\} \times a_0, \dots, \{1\} \times a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $S_i = \Sigma(a_0, \dots, a_n)$). Тогда $\widehat{C}_M = \bigsqcup_i \widehat{C}_{S_i}[x)$ и $\widehat{C}_{\operatorname{int} M} = \bigsqcup_i \widehat{C}_{S_i}(x]$, где $\operatorname{int} M$ — внутренность многогранника M, а $\bigsqcup$ означает объединение непересекающихся множеств (дизъюнктное объединение).*

Доказательство. Как нетрудно видеть, для всякого $y \in M$ существует единственное i такое, что для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ все точки $\varepsilon x + (1-\varepsilon) y \in \operatorname{int}(S_i)$. Также нетрудно видеть, что условие $\varepsilon x + (1-\varepsilon) y \in \operatorname{int}(S_i)$ при малых $\varepsilon > 0$ эквивалентно $\{1\} \times y \in C_{S_i}[x)$. Тем самым доказано первое утверждение.

С другой стороны, для всякого $y \in \operatorname{int}(M)$ существует единственное i такое, что для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ все точки $-\varepsilon x + (1+\varepsilon) y \in S_i$. Также нетрудно видеть, что условие $-\varepsilon x + (1+\varepsilon) y \in S_i$ при малых $\varepsilon > 0$ эквивалентно $\{1\} \times y \in \widehat{C}_{S_i}(x]$. Поскольку для всякого i имеет место включение $\widehat{C}_{T_i}(x] \subseteq \operatorname{int}(\widehat{C}_M)$, второе утверждение также доказано. □

Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ (конечного или бесконечного) обозначим $F_M(t)$ (и назовем функцией Стенли) формальную сумму $\sum_{(a_1,\dots,a_n) \in M} t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}$. Моном $t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}$ иногда обозначают t^a.

Рассмотрим теперь следующие ограниченные подмножества полуоткрытых конусов:

$$\Delta(a_0, \dots, a_n)[x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_0 a_0 + \dots + \mu_n a_n \mid 0 \leq \mu_i < 1, \text{ если } i \in I_+(x),\ 0 < \mu_i \leq 1, \text{ если } i \in I_-(x)\}$$

$$\Delta(a_0, \dots, a_n)(x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_0 a_0 + \dots + \mu_n a_n \mid 0 < \mu_i \leq 1, \text{ если } i \in I_+(x),\ 0 \leq \mu_i < 1, \text{ если } i \in I_-(x)\}.$$

Если P и Q — формальные ряды от переменных $t_1, \dots, t_n, 1/t_1, \dots, 1/t_n$, а R — многочлен от этих же переменных, то мы будем для удобства иногда писать $P = Q/R$ вместо $RP = Q$.

Лемма 3. *Для произвольного базиса $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^n$ и произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ в общем положении относительно этого базиса имеют место равенства*

$$(1) \qquad F_{C_{a_1,\ldots,a_n}[x)}(t) = \frac{F_{\Delta(a_0,\ldots,a_n)[x)}(t)}{(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_n})}, \qquad F_{C_{a_1,\ldots,a_n}(x]}(t) = \frac{F_{\Delta(a_0,\ldots,a_n)(x]}(t)}{(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_n})}.$$

Доказательство. Всякая точка $u \in C_{a_1,\ldots,a_n}[x)$ однозначно представляется в виде $v+w$, где $v \in \Delta(a_0,\ldots,a_n)[x)$ и $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}a_n$. То же самое верно для $C_{a_1,\ldots,a_n}(x]$ и $\Delta(a_0,\ldots,a_n)(x]$. $\square$

Обозначим теперь символом $\mathrm{L}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[t_1^{\pm 1},\ldots,t_n^{\pm 1}]$ кольцо многочленов Лорана от n переменных, а символом PL_n — модуль над кольцом L_n, порожденный формальными степенными рядами от $t_1^{\pm 1},\ldots,t_n^{\pm 1}$ вида $F_{C(a_1,\ldots,a_n)[x))}(t)$ и $F_{C(a_1,\ldots,a_n)(x])}(t)$, а также рядом 1 (тем самым кольцо L_n естественно вложено в PL_n). Из леммы 2 вытекает, что PL_n содержит функции Стенли $F_M(t)$ и $F_{C(M)}(t)$ всех решеточных многогранников и конусов над ними.

Заметим, что L_n является подкольцом поля $\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_n)$ рациональных функций от n переменных.

Лемма 4. *Существует гомоморфизм $R : \mathrm{PL}_n \to \mathbb{C}(t_1,\ldots,t_n)$ модулей над кольцом L_n такой, что $R(f) = f$ для произвольного $f \in \mathrm{L}_n$.*

Доказательство. Назовем формальный ряд x от переменных $t_1^{\pm 1},\ldots,t_n^{\pm 1}$ рациональным, если существуют элементы $f, g \in \mathrm{L}_n$ такие, что $fx = g$. Из формулы (1) вытекает, что для всех базисов $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}^n$ и произвольного x общего положения ряды $F_{C(a_0,\ldots,a_n)[x)}$ и $F_{C(a_0,\ldots,a_n)(x]}$ рациональны. Сумма рациональных рядов рациональна: $g_1x_1 = f_1$, $g_2x_2 = f_2$ влечет $g_1g_2(x_1+x_2) = g_1f_2+g_2f_1$; также если x рационален и $h \in \mathrm{L}_n$, то hx, очевидно, рационален. Отсюда вытекает, что все элементы модуля PL_n рациональны.

Для произвольного рационального x положим по определению $R(x) = f/g$, где $gx = f$ и $f, g \in \mathrm{L}_n \subset \mathbb{C}(t_1,\ldots,t_n)$. От выбора f и g это определение не зависит: если $g_1x = f_1$ и $g_2x = f_2$, то $g_1g_2x = g_1f_2 = g_2f_1$, откуда $f_1/g_1 = f_2/g_2$. Нетрудно видеть, что R действительно является гомоморфизмом L_n-модулей. $\square$

Доказательство теоремы Эрхарта. Пусть $M = \mathrm{co}(a_1,\ldots,a_N) \subset \mathbb{R}^n$ — решеточный многогранник, $\widehat{a}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{1\} \times a_i$, $i = 1,\ldots,N$, и $F \stackrel{\text{def}}{=} F_{\widehat{C}(M)} \in \mathrm{PL}_{n+1}$. Из (1) и лемм 1 и 2 вытекает, что $R(F) = \frac{P(t_0,\ldots,t_n)}{(1-t^{\widehat{a}_1})\ldots(1-t^{\widehat{a}_N})}$ для некоторого $P \in \mathbb{C}[t_0,\ldots,t_n]$. Отсюда получаем $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \#\{kM \cap \mathbb{Z}^n\}t^k = F(t,1,\ldots,1) = \frac{P(t,1,\ldots,1)}{(1-t)^N}$. Поскольку $\frac{1}{(1-t)^{m+1}} = 1 + \sum_{k\geq 1} f_m(k)t^k$, где $f_m(s) = \binom{s+m}{m} = \frac{(s+1)\ldots(s+m)}{m!}$ — многочлен, получаем, что $\#\{kM \cap \mathbb{Z}^n\} = \mathcal{E}_M(k)$ для некоторого многочлена $\mathcal{E}_M$. $\square$

Докажем теперь еще одно важное утверждение:

Теорема 2 (двойственность Эрхарта–Макдональда)**.** *Пусть M — решеточный многогранник, и $\mathcal{E}_M(t)$ — многочлен из теоремы 1. Тогда для всякого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ имеет место равенство $\mathcal{E}_M(-k) = (-1)^n\#\{k\,\mathrm{int}(M) \cap \mathbb{Z}^n\}$.*

Теорема вытекает из двух лемм.

Лемма 5 (двойственность Стенли)**.** $R(F_{\widehat{C}(M)})(t_0,\ldots,t_n) = (-1)^{n+1}R(F_{\mathrm{int}(\widehat{C}(M))}(1/t_0,\ldots,1/t_n)$.

Доказательство. Из определения множеств $\Delta(a_0,\ldots,a_n)[x)$ и $\Delta(a_0,\ldots,a_n)(x]$ вытекает, что отображение, переводящее произвольный вектор y в $a_1+\cdots+a_n-y$, является биекцией $\Delta(a_0,\ldots,a_n)[x) \longleftrightarrow \Delta(a_0,\ldots,a_n)(x]$. Из формулы (1) вытекает теперь, что $F_{\widehat{C}(a_0,\ldots,a_n)[x)}(t_0,\ldots,t_n) = t^{a_0+\cdots+a_n}F_{\widehat{C}(a_0,\ldots,a_n)(x]}(1/t_0,\ldots,1/t_n)$.

Для произвольного M рассмотрим триангуляцию $M = \bigcup_i S_i$, где $S_i = \mathrm{co}(a_{i0},\ldots,a_{in})$, и вектор x общего положения по отношению ко всем симплексам S_i. Обозначим, как обычно, $\widehat{a}_{ij} = \{1\} \times a_{ij}$. Тогда из леммы 2 и формулы (1) вытекает, что

$$F_{C_M}(t) = \sum_i F_{C_{S_i}[x)}(t) = \sum_i \frac{F_{\Delta(S_i)[x)}(t)}{(1-t^{\widehat{a}_{i0}})\ldots(1-t^{\widehat{a}_{in}})} = \sum_i t^{\widehat{a}_{i0}+\cdots+\widehat{a}_{in}} \frac{F_{\Delta(S_i)(x]}(1/t)}{(1-t^{\widehat{a}_{i0}})\ldots(1-t^{\widehat{a}_{in}})} =$$
$$= (-1)^{n+1} \sum_i \frac{F_{\Delta(S_i)(x]}(1/t)}{(1-t^{-\widehat{a}_{i0}})\ldots(1-t^{-\widehat{a}_{in}})} = (-1)^{n+1}F_{\mathrm{int}(\widehat{C}(M))}(1/t);$$

здесь $1/t$ означает совокупность $1/t_0,\ldots,1/t_n$. $\square$

Лемма 6. *Пусть f — многочлен с рациональными коэффициентами, а $g(t)$ — рациональная функция, заданная при $|t| < 1$ формулой $g(t) = \sum_{k\geq 0} f(k)t^k$. Тогда при $|t| > 1$ имеет место равенство $-g(t) = \sum_{k\leq -1} f(k)t^k$.*

Доказательство. В силу линейности утверждения достаточно проверить его для любого базиса в пространстве многочленов. Если в качестве такового взять $f_m(s) = \binom{s+m}{m} = \frac{(s+m)(s+m-1)\dots(s+1)}{m!}$, $m = 0,1,2,\dots$, то $g(t) = 1/(1-t)^{m+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-m-1}{k}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-m-1)\dots(-m-k)}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)\dots(m+k)}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}f_m(k)t^k$. С другой стороны, $\sum_{k\le -1}f_m(k)t^k = (-1)^m\sum_{k\ge 1}\binom{k-1}{m}t^{-k} = (-1)^m\sum_{k\ge m+1}\binom{k-1}{m}t^{-k} = (-1)^m t^{-m-1}\sum_{k\ge 0}\binom{k+m}{m}t^{-k} = (-1)^m t^{-m-1}1/(1-1/t)^{m+1} = -1/(1-t)^{m+1} = -g(t)$, что и требовалось. $\square$

Доказательство двойственности Эрхарта–Макдональда. $\sum_{k\ge 1}\#\{k\,\mathrm{int}(M)\cap\mathbb{Z}^n\}t^k = R(F_{\mathrm{int}(C_M)})(t,1,\dots,1) = (-1)^{n+1}F_{\widehat{C}(M)}(1/t,1,\dots,1)$ (по лемме 5) $= (-1)^{n+1}\sum_{k\ge 0}\mathcal{E}_M(k)t^{-k} = (-1)^n\sum_{k\le -1}\mathcal{E}_M(k)t^{-k}$ (по лемме 6) $= (-1)^n\sum_{k\ge 1}\mathcal{E}_M(-k)t^k$, откуда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Касательным конусом T_vM к решеточному многограннику M в точке v называется конус $\{y\in\mathbb{R}^n \mid \forall x\in M : \langle y, x-v\rangle \ge 0\}$.

Теорема 3 (Брион)**.** *Пусть M — решеточный многогранник с вершинами $v_1,\dots,v_N$. Тогда $R(F_M)(t) = \sum_{i=1}^N R_{F(v_i+T_{v_i}M)}(t)$.*

Для доказательства теоремы Бриона нам потребуется

Лемма 7. *Если выпуклый конус C содержит аффинное подпространство $A\subset\mathbb{Q}^n$ положительной размерности, то $R(F_C) = 0$.*

Доказательство. В этом случае существует вектор $w\in\mathbb{Z}^n$ такой, что $w+C = C$ и, следовательно, $t^wF_C(t) = F_C(t)$. Отсюда вытекает, что $(1-t^w)R(F_C)(t) = 0$ и, следовательно, $R(F_C)(t) = 0$ (множество рациональных функций — поле и, следовательно, не содержит делителей нуля). $\square$

Доказательство теоремы Бриона. Пусть вначале $M = \mathrm{co}(a_0,\dots,a_n)$ — симплекс, где $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{Z}^n$. Грани $\Lambda\subset M$ — выпуклые оболочки различных подмножеств $B\subset\{a_0,\dots,a_n\}$, причем $\dim\mathrm{co}(B) = \#B-1$. Произвольная точка $w\in\mathbb{Z}^n\setminus M$ принадлежит конусу $C_{\mathrm{co}(B)}$ для единственной грани $\mathrm{co}(B)$ минимальной размерности, а также конусам $C_{\mathrm{co}(B')}$ для всех $B'\supset B$. Из теоремы двойственности Мебиуса для частично упорядоченного по включению множества подмножеств $\{a_0,\dots,a_n\}$ вытекает (докажите!), что $\sum_{B'\supseteq B}(-1)^{\#B'} = 0$. Следовательно, $\sum_{B\subset\{a_0,\dots,a_n\}}(-1)^{\#B}F_{C_{\mathrm{co}(B)}}(t) = -F_M(t)$. Применим к этому равенству гомоморфизм R из леммы 4. По лемме 7 при этом исчезнут все слагаемые, кроме слагаемых, соответствующих вершинам. Это дает теорему Бриона для симплекса.

Пусть теперь M — произвольный решеточный многогранник, а $M = \bigcup_{i=1}^N S_i$ — его триангуляция. Существует произвольно малое число $\varepsilon>0$ и произвольно короткий вектор $y\in\mathbb{R}^n$ такие, что $\mathbb{Z}^n\cap M = \mathbb{Z}^n\cap M'$, где $M' = y+(1+\varepsilon)M$, и аффинные подпространства, порожденные гранями всех симплексов $S_i' = y+(1+\varepsilon)S_i$, не пересекаются к $\mathbb{Z}^n$. Если $v' = y+(1+\varepsilon)v$, где v — вершина M, то $\mathbb{Z}^n\cap T_vM = \mathbb{Z}^n\cap T_{v'}M'$. Отсюда $\sum_v R(F_{v+T_vM}) = \sum_v R(F_{v'+T_{v'}M'}) = \sum_{i=1}^N\sum_{v'\in S_i'}R(F_{v'+T_{v'}S_i'})$ (поскольку грани конусов не содержат целых точек) $= \sum_i R(F_{S_i'})$ (по теореме Бриона для симплексов) $= R(F_{M'})$ (потому что грани симплексов не содержат целых точек) $= R(F_M)$. $\square$