ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Многочлен Бернарди (многочлен Поттса для ориентированных графов).

Пусть G — конечный ориентированный граф с n вершинами ($\#V(G) = n$) и k ребрами ($\#E(G) = k$); разрешаются параллельные (ab, ab) и встречные (ab, ba) ребра. Петли (aa) также разрешаются, но они, понятно, не ориентированы.

Будем писать $a \preceq b$ (где a, b — вершины), если существует ориентированный путь, соединяющий a с b. Отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно, но не антисимметрично: $a \preceq b$ и $b \preceq a$, если существует ориентированный цикл, проходящий через вершины a и b. В этом случае мы будем писать $a \sim b$; как нетрудно видеть, $\sim$ является отношением эквивалентности. Фактор-множество $G/\sim$ (множество классов эквивалентности, называемых также компонентами сильной связности) имеет естественную структуру ориентированного графа: ребро соединяет класс α с классом β тогда и только тогда, когда в графе G существует ребро ab, где $a \in \alpha$ и $b \in \beta$. Очевидно, граф $G/\sim$ не содержит петель и ориентированных циклов; он наследует из графа G отношение $\preceq$, но в отличие от G, здесь оно уже антисимметрично, т.е. превращает $G/\sim$ в частично упорядоченное множество.

Пусть q — целое положительное число. Для произвольного отображения $f : V(G) \to \{1, \dots, q\}$ ("раскраски" вершин графа в цвета $1, \dots, q$) обозначим $f^>$ множество ребер ab таких, что $f(a) > f(b)$; аналогично $f^<$, $f^\geq$ и т.п.

Теорема 1. *Существует (и единствен) многочлен $B_G \in \mathbb{Q}[q, y, z]$ такой, что для всякого $q = 1, 2, \dots$ имеет место равенство $B_G(q, y, z) = \sum_{f:V(G)\to\{1,\dots,q\}} y^{\#f^>} z^{\#f^<}$.*

Доказательство. Индукция по количеству вершин графа. Для графов с 1 вершиной все ребра — петли, так что $B_G(q, y, z) = q$.

Пусть теперь $\#V(G) = n$, а для графов с меньшим количеством вершин теорема уже доказана. Обозначим правую часть форулы $B_G(q, y, z)$; полиномиальная зависимость от y и z (при фиксированном q) очевидна, исследовать нужно только зависимость от q. Если $F_q(G)$ — множество раскрасок вершин в q цветов, то $F_q(G) \subset F_{q+1}(G)$ для любого q и, следовательно, $B_G(q+1, y, z) = \sum_{f\in F_q(G)} y^{\#f^>} z^{\#f^<} + \sum_{f\in F_{q+1}(G)\setminus F_q(G)} y^{\#f^>} z^{\#f^<} = B_G(q, y, z) + \sum_{f\in F_{q+1}(G)\setminus F_q(G)} y^{\#f^>} z^{\#f^<}$. Для любой раскраски $f \in F_{q+1}(G) \setminus F_q(G)$ обозначим $H(f)$ множество вершин a, для которых $f(a) = q + 1$. Также для произвольного подмножества $W \subset V(G)$ обозначим $\alpha(W)$ множество ребер ab, где $a \in W$ и $b \notin W$, а $\beta(W)$ — множество ребер ab, где $a \notin W$ и $b \in W$. Тогда сумма по $f \in F_{q+1}(G) \setminus F_q(G)$ равна $\sum_{W\subset V(G), W\neq\varnothing} y^{\#\alpha(W)} z^{\#\beta(W)} B_{G\setminus W}(q, y, z)$, где под $G \setminus W$ подразумевается граф, полученный удалением из G всех вершин $a \in W$ и всех ребер, исходящих из таких вершин или входящих в них. Граф $G \setminus W$ имеет менее n вершин, так что по предположению индукции зависимость от q, y и z во втором слагаемом полиномиальная; обозначим ее $P(q, y, z)$. Теперь в качестве B_G нужно взять многочлен, удовлетворяющий равенству $B_G(q+1, y, z) - B_G(q, y, z) = P(q, y, z)$ — нетрудно видеть, что такой существует и единствен. □

.

Пример 1. Для графа G с 2 вершинами a и b, соединенными ребром ab, существует q раскрасок f, при которых $f(a) = f(b)$, $q(q-1)/2$ раскрасок f, для которых $f(a) > f(b)$ и $q(q-1)/2$ раскрасок f, для которых $f(a) < f(b)$. Тем самым $B_G(q, y, z) = q + \frac{q(q-1)}{2}(y + z)$. Для графа G с вершинами a и b, соединенными двумя параллельными ребрами ab, получим, соответственно, $B_G(q, y, z) = q + \frac{q(q-1)}{2}(y^2 + z^2)$, а для графа G с вершинами a и b и встречными ребрами ab, ba — $B_G(q, y, z) = q + q(q-1)yz$.

Простейшие свойства многочлена Бернарди:

1) Многочлен B_G симметрический по y и z: $B_G(q, z, y) = B_G(q, y, z)$.
2) Многочлен B_G не изменяется при смене направления всех ребер графа G.
3) Если e — петля в графе G, то $B_{G\setminus e} = B_G$.
4) Многочлен B_G имеет степень $n = \#V(G)$ по q, и $B_G(q, 1, 1) = q^n$.
5) Если граф G не содержит петель, то многочлен $B_G(q, t, t)$ имеет степень $k = \#E(G)$ по t.
6) $B_G(q, 0, 0) = q^{\beta_0(G)}$, где $\beta_0(G)$ — количество компонент связности графа G; многочлен $B_G(q, y, z)$ делится на $q^{\beta_0(G)}$.

Обозначим $\chi_G^{>}(q)$ количество раскрасок $f : V(G) \to \{1, \dots, q\}$ таких, что $f(a) > f(b)$ для всякого ребра ab в графе G, а $\chi_G^{\geq}(q)$ — количество раскрасок $f : V(G) \to \{1, \dots, q\}$ таких, что $f(a) \geq f(b)$ для всякого ребра ab.

Теорема 2. *1)* $\chi_G^{\geq}(q) = B_G(q, 1, 0)$.

2) Пусть $B_G(q, y, 0) = a_k(q)y^k + \dots + a_1(q)y + a_0(q)$, *где* k *— количество ребер в графе* G. *Тогда* $a_k(q) = \chi_G^{>}(q)$.

3) Если в графе G *есть ориентированный путь из* ℓ *ребер, то* $\chi_G^{>}(\ell) = 0$. *Если в графе нет ориентированного пути из* ℓ *ребер (т.е. все ориентированные пути содержат менее, чем* ℓ *ребер), то* $\chi_G^{>}(\ell) > 0$. *В частности,* $\chi_G^{>}(q) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* G *содержит ориентированный цикл.*

Доказательство. Доказательство утверждений 1 и 2 — упражнение. Утверждение 3: ориентированный путь из ℓ ребер содержит $\ell+1$ вершин $a_1, \dots, a_{\ell+1}$, так что неравенства $f(a_1) > \dots > f(a_{\ell+1})$, где $f(a_i) \in \{1, \dots, \ell\}$ для всех i, невозможны. Напротив, если любой ориентированный путь в G содержит менее ℓ ребер, то положим $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} 1+$ количество ребер в самом длинном ориентированном пути, начинающемся в вершине a. Нетрудно видеть, что $f(a) > f(b)$ для любого ребра ab графа G, откуда вытекает, что $\chi_G^{>}(\ell) > 0$. $\square$

Многочлен Бернарди B_G можно восстановить по хроматическому многочлену χ графов, связанных с G. Пусть $T \subset E(G)$ — некоторый набор ребер графа G; обозначим $G \setminus T$ граф, полученный удалением из G всех ребер $e \in T$ (множество вершин при этом не меняется: $V(G \setminus T) = V(G)$), G/T — граф, полученный стягиванием всех ребер $e \in T$, и G^{-T} — граф, полученный сменой ориентации всех ребер $e \in T$.

Теорема 3.

1) $B_G(q, y, z) = \sum_{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \chi_{(G/R)^{-T}}^{>}(q)$.

2) $B_G(q, 1+y, 1+z) = \sum_{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \chi_{(G \setminus R)^{-T}}^{>}(q)$.

Доказательство. Обозначим $\delta_+, \delta_-, \delta_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ функции, заданные формулами

$$\delta_+(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}, \qquad \delta_-(n) = \begin{cases} 1, & n < 0, \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}, \qquad \delta_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Тогда для утверждения 1

$$\begin{aligned} B_G(q, y, z) &= \sum_{f : V(G) \to \{1, \dots, q\}} \prod_{(ab) \in E(G)} \big(\delta_0(f(a) - f(b)) + y\delta_+(f(a) - f(b)) + z\delta_-(f(a) - f(b))\big) \\ &= \sum_{R,T \subset E(G)} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \#\{f : V(G) \to \{1, \dots, q\} \mid f(a) = f(b)\, \forall (ab) \in R, \\ &\qquad f(a) < f(b)\, \forall (ab) \in T, \\ &\qquad f(a) > f(b)\, \forall (ab) \in E(G) \setminus R \setminus T\} \\ &= \sum_{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \chi_{(G/R)^{-T}}^{>}(q). \end{aligned}$$

Для утверждения 2

$$\begin{aligned} B_G(q, 1+y, 1+z) &= \sum_{f : V(G) \to \{1, \dots, q\}} \prod_{(ab) \in E(G)} \big(1 + y\delta_+(f(a) - f(b)) + z\delta_-(f(a) - f(b))\big) \\ &= \sum_{R,T \subset E(G)} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \#\{f : V(G) \to \{1, \dots, q\} \mid f(a) < f(b)\, \forall (ab) \in T, \\ &\qquad f(a) > f(b)\, \forall (ab) \in E(G) \setminus R \setminus T\} \\ &= \sum_{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing} y^{\#E(G) - \#R - \#T} z^{\#T} \chi_{(G \setminus R)^{-T}}^{>}(q). \end{aligned}$$

$\square$

Для произвольного ориентированного графа G с n вершинами определим многогранник $\Delta_G \subset \mathbb{R}^n$ как $\Delta_G \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_a \leq 1\, \forall a \in V(G), x_a \leq x_b\, \forall (ab) \in E(G)\}$.

Теорема 4. Δ_G *— выпуклый решеточный многогранник. Он имеет непустую внутренность тогда и только тогда, когда граф* G *не содержит ориентированных циклов.*

Доказательство. Δ_G — множество решений системы линейных неравенств. Таким образом, оно является пересечением полупространств в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, выпуклым многогранником.

Пусть $v \in \Delta_G$ — вершина. Обозначим $I(v)$ множество неравенств из определения Δ_G, для которых в точке v достигается равенство, а $L(v) \subset \mathbb{R}^n$ — множество решений уравнений из множества $I(v)$ (в частности,

$v \in L(v)$). Все неравенства, не входящие в $I(v)$, в точке v выполнены строго и, следовательно, выполнены также в некоторой окрестности точки v. Пусть $w \in L(v)$ и $w \neq v$. Тогда прямая wv целиком лежит в $L(v)$ и, следовательно, пересечение $L(v) \cap \Delta_G$ содержит (достаточно короткий) интервал с центром в точке v. Но вершина многогранника не может быть точкой никакого интервала, лежащего целиком в Δ_G, откуда следует, что пересечение $L(v) = \{v\}$.

Равенства из множества $I(v)$ имеют вид либо $x_i = 0$, либо $x_i = 1$, либо $x_i = x_j$. Тем самым координаты x_i разбиваются на группы равных; если хотя бы одна группа не содержит равенства $x_i = 0$ или $x_i = 1$, множество решений $L(v)$ содержит бесконечно много точек. Поскольку это не так, все координаты вершины v равны 0 или 1, и тем самым Δ_G — решеточный многогранник.

Для доказательства второго утверждения нам потребуется лемма:

Лемма 1. *$\chi^{\geq}_G(q) = \#\big((q-1)\Delta_G \cap \mathbb{Z}^n\big)$ и $\chi^{>}_G(q) = \#\big((q+1)\operatorname{int}(\Delta_G) \cap \mathbb{Z}^n\big)$.*

Иными словами, $\chi^{\geq}_G(q) = \mathcal{E}_{\Delta_G}(q-1)$ и $\chi^{>}_G(q)\mathcal{E}_{\operatorname{int}(\Delta_G)}(q+1)$, где $\mathcal{E}$ — многочлен Эрхарта.

Доказательство. Точки $\big((q+1)\operatorname{int}(\Delta_G) \cap \mathbb{Z}^n\big)$ это наборы $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ такие, что $0 < x_a < (q+1) \Longleftrightarrow x_a \in \{1, \dots, q\}$ и $x_a < x_b$ для всех $(ab) \in E(G)$. Тогда $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} x_a$ — раскраска в q цветов, для которой $f(a) < f(b)$ для произвольного ребра (ab); количество таких раскрасок по определению равно $\chi^{>}_G(q)$. Аналогично, точки $\big((q-1)\Delta_G \cap \mathbb{Z}^n\big)$ это наборы $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ такие, что $0 \leq x_a \leq (q-1)$ и $x_a \leq x_b$ для всех $(ab) \in E(G)$. Тогда $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} x_a + 1$ — раскраска в q цветов, для которой $f(a) \leq f(b)$ для произвольного ребра (ab); количество таких раскрасок по определению равно $\chi^{\geq}_G(q)$ — лемма доказана. □

Если граф G содержит ориентированный цикл из вершин $a_1, \dots, a_p$, то $x_{a_1} \leq \dots \leq x_{a_n} \leq x_{a_1} \Longrightarrow x_{a_1} = \dots = x_{a_n}$ для всех $x \in \Delta_G$ — следовательно, Δ_G лежит в собственном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, и $\operatorname{int}\Delta_G = \varnothing$. Обратно, пусть граф G не содержит ориентированных циклов. Тогда по теореме 2 существует $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и раскраска $f : V(G) \to \{1, \dots, q\}$ такая, что $f(a) > f(b)$ для любого ребра $(ab) \in E(G)$. Тогда точка $x_a = 1 - f(a)/(2q)$, $a \in V(G) = \{1, \dots, n\}$, принадлежит $\operatorname{int}\Delta_G$, которая тем самым непуста — теорема доказана. □

Напомним, что для произвольного ориентированного графа G определен граф $G/\sim$, вершины которого — компоненты сильной связности графа G. Иными словами, $G/\sim = G/R$, где R — множество ребер графа G, входящих в какой-нибудь ориентированный цикл; граф $G/\sim$ не содержит ориентированных циклов.

Теорема 5. *Для произвольного ориентированного графа G и произвольного числа $q = 1, 2, \dots$ имеет место равенство $\chi^{\geq}_G(-q) = (-1)^{\#V(G/\sim)}\chi^{>}_{G/\sim}(q)$.*

Доказательство. Пусть $f : V(G) \twoheadrightarrow \{1, \dots, q\}$ — раскраска, такая что $f(a) \leq f(b)$ для всякого ребра $(ab) \in E(G)$. Если ребро (ab) входит в ориентированный цикл, то обязательно $f(a) = f(b)$; отсюда вытекает, что $\chi^{\geq}_{G/e}(q) = \chi^{\geq}_G(q)$ для всякого ребра e, входящего в ориентированный цикл. Тем самым $\chi^{\geq}_{G/\sim}(q) = \chi^{\geq}_G(q)$, так что достаточно доказать равенство $\chi^{\geq}_G(-q) = (-1)^{\#V(G)}\chi^{>}_G(q)$ для графа G, не содержащего ориентированных циклов.

Если G не содержит ориентированных циклов, то $\operatorname{int}\Delta_G \neq \varnothing$ по теореме 4; теперь нужное утверждение вытекает из леммы 1 и двойственности Эрхарта–Макдональда. □

Следствие 1. *$\chi^{>}_G(-1) = (-1)^{\#V(G)}$, если G не содержит ориентированных циклов; иначе равен нулю. $\chi^{\geq}_G(-1) = (-1)^{\beta_0(G)}$, если каждое ребро G входит в какой-нибудь ориентированный цикл (т.е. $G/\sim$ не содержит ни одного ребра); иначе равен нулю.*

Доказательство. Очевидно, $\chi^{>}_G(1) = 1$, если граф не содержит ни одного ребра, и $= 0$ в противном случае. Также очевидно, что $\chi^{\geq}_G(1) = 1$ для любого графа. Теперь утверждение вытекает из теоремы 5. □

Следствие 2 (теорем 5 и 3)**.**

1) $$B_G(-q, y, z) = \sum_{\substack{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing \\ (G/R)^{-T} \text{ не содержит ориентированных циклов}}} (-1)^{\#V(G/R)} y^{\#E(G)-\#R-\#T} z^{\#T} \chi^{\geq}_{(G/R)^{-T}}(q)$$

2) $$B_G(-q, 1+y, 1+z) = (-1)^{\#V(G)} \sum_{\substack{R,T \subset E(G), R \cap T = \varnothing \\ (G \setminus R)^{-T} \text{ не содержит ориентированных циклов}}} y^{\#E(G)-\#R-\#T} z^{\#T} \chi^{\geq}_{(G \setminus R)^{-T}}(q).$$