ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ

. Успешное решение любой из приведенных ниже задач означает успешную сдачу курса. При этом обычно неинтересно, если несколько человек рассказывают одинаковые или похожие решения одной и той же задачи — нужно заранее договориться, кто что рассказывает.

Список постоянно обновляется и не является исчерпывающим. Решения некоторых задач лектору неизвестны.

1. Функции Мебиуса

Задача 1.1. Пусть $\mathcal{P}_n$ — частично упорядоченное множество разбиений, $P_n = \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \mid \sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_k = \{1, \dots, n\}\}$ (множество наборов попарно непересекающихся подмножеств в $\{1, \dots, n\}$, объединение которых есть все $\{1, \dots, n\}$), и $\sigma \le \tau$, если части σ_i разбиения σ получается из частей τ_j разбиения τ подразбиением. а) Пусть $\mathbf{1}$ — наибольший элемент этого множества, т.е. разбиение с единственной частью $\{1, \dots, n\}$, а $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ — разбиение на k частей. Докажите, что $\mu(\sigma, \mathbf{1}) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. б) Найдите и докажите формулу для функции Мебиуса $\mu(\sigma, \tau)$, где $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_n$ — произвольные разбиения.

2. Статсуммы решеточных моделей

Моделью Изинга (ферромагнитного кристалла) называется граф G (кристаллическая решетка), снабженный функцией $f : V(G) \to \{-1, 1\}$ (значение функции в вершине v — значение спина атома, находящегося в соответствующем месте решетки). Энергия состояния f равна $E(f) = J \sum_{(ab) \in E(G)} \delta(f(a), f(b)) + h \sum_{c \in V(G)} f(c)$. Первый член — как в модели Поттса (взаимодействие атомов решетки между собой), а второй — взаимодействие атомов решетки с внешним магнитным полем.

Задача 2.1. Выведите формулу, связывающую статистическую сумму $M_G(\beta, J, h) = \sum_f e^{-\beta E(f)}$ с многочленом Поттса $Z_G(2, v)$.

Задача 2.2. Пусть G — кольцо, состоящее из n вершин $0, 1, \dots, n-1$, каждая соединена с двумя соседями (0 — с 1 и с $n-1$). Найдите а) $Z_G(q, \beta)$, б) $M_G(\beta, J, h)$, в) среднее значение $\langle E \rangle$ энергии (в модели Изинга с магнитным полем h), г) среднее значение $\langle f(0) \rangle$ спина в вершине 0 (в той же модели). Исследуйте поведение всех этих величин, когда температура стремится к нулю и к бесконечности ($\beta = 1/kT \to +\infty$ и $\beta \to +0$ соответственно), а также при $h \to 0$. д) Вычислите *среднюю спонтанную намагниченность* в вершине 0, т.е. величину $\mathcal{M} = \lim_{h \to +0} \lim_{n \to \infty} \langle f(0) \rangle$.

Из соображений симметрии понятно, что $\langle f(0) \rangle$ при фиксированном n зависит от h нечетно, и поэтому равна нулю $h = 0$. В то же время ответ в упражнении 2.2д не равен нулю. Это явление называется ферромагнетизмом.

3. Матричная теорема о деревьях и ее аналоги

Пусть $1 \le p < q \le n$; обозначим $(pq) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ оператор, переводящий базисные векторы u_p и u_q (стандартного ортонормированного базиса $u_1, \dots, u_n$) друг в друга, а остальные базисные векторы — в себя. Этот оператор является отражением (в гиперплоскости $x_p = x_q$); все вместе эти отражения порождают конечную группу Σ_n (группу перестановок), действующую на $\mathbb{R}^n$ перестановками координат. Матрица оператора $W = \sum_{1 \le p < q \le n} w_{pq}(I - (pq)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в стандартном базисе получается из матрицы Лапласа подстановкой w_{pq} вместо w_{qp} при $q > p$ (таким образом, матрица W симметрическая).

Задача 3.1. а) Опишите, пользуясь матричной теоремой о деревьях, характеристический многочлен матрицы W. б) Проделайте такую же работу для других конечных групп, порожденных отражениями (групп Коксетера). Например, группа D_n порождена операторами (pq) и операторами $(pq)^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, действующими по правилу $(pq)^-(u_p) = -u_q$, $(pq)^-(u_q) = -u_p$ (остальные базисные векторы переходят в себя); нужно вычислить характеристический многочлен оператора $W = \sum_{1 \le p < q \le n} \big(w_{pq}^+(I - (pq)) + w_{pq}^-(I - (pq))\big)$. в) Тот же вопрос о комплексных группах, порожденных отражениями (группах Шевалле).

4. Решеточные многогранники

Задача 4.1. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Эрхарта и двойственности Эрхарта–Макдональда для выпуклых многогранников, вершины которых имеют рациональные координаты.

Указание. См., например, C. Haase, B. Nill, A. Paffenholz, *Lecture Notes on Lattice Polytopes*, winter 2012, Fall School on Polyhedral Combinatorics, TU Darmstadt.

Задача 4.2. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$, и $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq \alpha x\}$. а) Докажите, что вершинами выпуклого множества $N \stackrel{\text{def}}{=} \text{co}(M \cap \mathbb{Z}^n)$ являются точки (p_n, q_n), где o_n, q_n — соответственно, числитель и знаменатель $2n$-ой подходящей дроби в разложении α в цепную дробь. б) Пусть C_n — касательный конус к множеству N в точке (p_n, q_n), а $F_n(t_1, t_2)$ — его ряд Стенли. Выпишите для какого-нибудь (в идеале — для произвольного) иррационального α рациональные функции $u_n(t_1, t_2) = R(F_n)$, и исследуйте сходимость ряда $\sum_n u_n(t_1, t_2)$.

5. Многочлен Бернарди

Задача 5.1. Граф P_n состоит из вершин $1, \dots, n$, при этом для любых $1 \leq i < j \leq n$ имеет ребро (ij). Граф Q_n состоит из тех же вершин, при этом для каждого $k = 1, \dots, n-1$ имеет k ребер $(k, k+1)$. Докажите, что старшие по q члены многочленов Бернарди графов P_n и Q_n совпадают (они представляют собой многочлены от y и z), и вычислите их явно.

6. Числа Гурвица

Задача 6.1. а) Докажите, что оператор cut-and-join в пространстве полубесконечных форм нулевого заряда $\Lambda_0^{\infty/2}$ коммутирует со всеми операторами вида $z_m \frac{\partial}{\partial z_m}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. б) Выведите отсюда, что "чистые состояния" (стандартные базисные векторы v_λ пространства $\Lambda_0^{\infty/2}$, где λ — разбиение) являются собственными векторами этого оператора. в) Докажите, что собственное значение, отвечающее собственному вектору v_λ, равно $F_2(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$.

Задача 6.2. а) Пусть $\mathcal{E}$ — элемент алгебры $\bigoplus_n Z\mathbb{C}[S_n][\beta]$, в который переходит при изоморфизме производящая функция $e^H \in \mathbb{C}[[p]][\beta]$ "несвязных" чисел Гурвица, и пусть $\mathcal{E}_n$ — ее компонента в $Z\mathbb{C}[S_n][\beta]$ (соответствующая членам степени n по p в функции e^H). Докажите, что $\mathcal{E}_n$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \beta} = u_{2^1 1^{n-2}} \mathcal{E}_n$, где $u_{2^1 1^{n-2}} \in Z\mathbb{C}[S_n]$ — сумма всех транспозиций (ij) в группе S_n, а умноженеие в правой части производится в алгебре $Z\mathbb{C}[S_n]$. б) Докажите, что для всякого разбиения λ с $|\lambda| = n$ имеет место равенство $u_{2^1 1^{n-2}} \tau_\lambda = F_2(\lambda) \tau_\lambda$, где $\tau_\lambda \in Z\mathbb{C}[S_n]$ — идемпотент, соответствующий неприводимомоу представлению λ, а $F_2(\lambda)$ определено в задаче 6.1в.

Указание (к задаче 6.2б)**.** В неприводимом представлении V_λ группы S_n, соответствующем разбиению λ, идемпотент τ_λ действует как тождественный оператор, а идемпотенты τ_μ для прочих неприводимых представлений μ — нулем. Элемент $u_{2^1 1^{n-2}}$ — центральный и, следовательно (по лемме Шура), действует умножением на константу; задача в том, чтобы доказать, что эта константа равна $F_2(\lambda)$. Очевидно, это эквивалентно тому, что след $\text{Tr}_\lambda u_{2^1 1^{n-2}} = F_2(\lambda) \dim \lambda$, где размерность $\dim \lambda$ неприводимого представления см. в любом учебнике по теории представлений ("формула крюков"). Все транспозиции сопряжены в S_n и, следовательно, имеют одинаковый след в любом представлении — достаточно, тем самым, доказать, что $\text{Tr}_\lambda(12) = \frac{2F_2(\lambda) \dim \lambda}{n(n-1)}$.

Собственные значения оператора (12) в представлении V_λ равны 1 и -1. С помощью явной конструкции V_λ, называемой модулем Шпехта (см. в учебниках по теории представлений), можно доказать, что кратность значения 1 равна количеству таблиц Юнга формы λ (заполнений диаграммы Юнга формы λ числами $1, \dots, n$ без повторений так, чтобы числа возрастали по строкам и по столбцам), в которых 2 стоит в первой строке, а кратность -1 — количеству таблиц, где 2 стоит в первом столбце. Тем самым достаточно доказать, что разность этих двух чисел равна $\frac{2F_2(\lambda) \dim \lambda}{n(n-1)}$, что делается по индукции аналогично доказательству "формулы крюков".

Задача 6.3. Докажите детерминантную формулу для многочленов Шура и тождество Коши для них (см. лекцию 11).