НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Экзамен. 11.12.2017.

Решения просьба сдать в понедельник 18 декабря.

Критерии оценки: для «отлично» достаточно 25 баллов, для «хорошо» достаточно 20 баллов, для «удовлетворительно» достаточно 15 баллов.

Задача 1. Постройте на произведении нечётномерных сфер $\mathbb{S}^{2k+1} \times \mathbb{S}^{2l+1}$, где $k, l \geqslant 0$, комплексную структуру. (5 баллов)

Задача 2. Докажите, что тавтологические (универсальные) расслоения над комлексными проективными пространствами в самом деле являются голоморфными расслоениями. (5 баллов)

Задача 3. Докажите, что расслоение $T\mathbb{C}P^n \oplus \underline{1}$ *как C^∞-расслоение* изоморфно расслоению $\underbrace{\xi^* \oplus \cdots \oplus \xi^*}_{n+1 \text{ раз}}$, где $\underline{1}$ тривиальное комплексное расслоение ранга 1, ξ обозначает тавтологическое расслоение, а звездочка обозначает двойственное расслоение (как комплексное!). (10 баллов)

Задача 4. *Носителем* $\operatorname{supp} s$ *сечения* $s \in \mathscr{F}(U)$ называется множество

$$\operatorname{supp} s = \{x \in U | s_x \neq 0\}.$$

Докажите, что $\operatorname{supp} s$ замкнуто в U. Носителем пучка $\mathscr{F}$ на многообразии M называется множество $supp\, \mathscr{F} = \{x \in M | \mathscr{F}_x \neq 0\}$, это множество может быть незамкнуто, постройте пример. (5 баллов)

Задача 5. Докажите, что локально постоянные пучки ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и так далее) на хаусдорфовом пространстве X, таком что у него есть хотя бы одна связная компонента, содержащая более одной точки, не являются ни мягкими, ни тонкими. (5 баллов)

Задача 6. Докажите, что пучок $\mathscr{O}_\mathbb{C}$ голоморных функций на комплексной плоскости не является ни мягким, ни тонким. (5 баллов)

Задача 7. Напомним, что мы обозначили через $\mathscr{O}_{n,z}$ кольцо ростков голоморфных функций в точке $z \in \mathbb{C}^n$. Используя результант, докажите, что если ростки голоморфных функций f и g взаимно просты в $\mathscr{O}_{n,0}$, то существует такой $\varepsilon > 0$, что ростки f и g взаимно просты в $\mathscr{O}_{n,z}$ при $|z| < \varepsilon$. (5 баллов)

Задача 8. Докажите голоморфную теорему об обратной функции. Пусть U, V открытые подмножества в $\mathbb{C}^n$, причём $0 \in U$, и пусть $f : U \longrightarrow V$ такое голоморфное отображение, что голоморфный якобиан $J(f) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$ невырожден в нуле. Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности $0 \in \mathbb{C}^n$, и обратное отображение f^{-1} голоморфно в точке $f(0)$. (5 баллов)

Задача 9. Рассмотрим голоморфное расслоение $E \longrightarrow M$ с эрмитовым скалярным произведением $(\, , \,)$. Выберем произвольную точку $p \in M$ и выберем такие (голоморфные) координаты $z = (z^1, \dots, z^n)$ в окрестности точки p, что координатами p будут $z = 0 = (0, \dots, 0)$.

а) Докажите, что в достаточно малой окрестности U точки p можно выбрать такой голоморфный базис в сечениях $\Gamma(U, E)$, что матрица h скалярного произведения $(\, , \,)$ в этом базисе имеет вид

$$h(z) = I + O(|z|^2) \tag{1}$$

при $|z| \to 0$. (5 баллов)

б) Докажите, что при этом для матрицы кривизны F канонической связности в этом базисе верна формула $F(0) = \bar{\partial}\partial h(0)$. (5 баллов)

Указание. Сначала сделайте такую постоянную по z линейную замену базиса, что $h(0)$ превращается в I, а затем сделайте линейную замену базиса *с матрицей вида* $I + A(z)$, *где* $A(z)$ *линейно по* z, $A(0) = 0$, *которая приводит к формуле (1)*

Задача 10. Используя второй класс Чженя c_2, докажите, что универсальное расслоение γ^2 над многообразием Грассмана $G_2(\mathbb{C}^3)$ нетривиально.

Указание. Докажите, что число Чженя

$$\langle c_2(\gamma^2), [G_2(\mathbb{C}^3)] \rangle := \int_{G_2(\mathbb{C}^3)} c_2(\gamma^2)$$

не равно нулю. (15 баллов)