НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 3. Пучки II. 02.10.2017.

Задача 1. Пусть пучок $\mathscr{A}$ является подпучком $\mathscr{B}$. Напомним, что мы определили факторпучок $\mathscr{C} = \mathscr{B}/\mathscr{A}$ как пучок, порожденный предпучком, группа (кольцо и т.д.) сечений которого над U равна $\mathscr{B}(U)/\mathscr{A}(U)$.

а) проверьте, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{i} \mathscr{B} \xrightarrow{p} \mathscr{B}/\mathscr{A} \longrightarrow 0,$$

где i вложение, а p естественная проекция, точна.

б) Проверьте, что, можно определить факторпучок $\mathscr{C} = \mathscr{B}/\mathscr{A}$ конструктивно, положив $\mathscr{C}(U)$ группой (кольцом и т.д.) классов эквивалентности наборов $(\{U_\alpha\}, \{\sigma_\alpha\})$, где $\{U_\alpha\}$ открытое покрытие $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, а $\sigma_\alpha \in \mathscr{B}(U_\alpha)$, такие что $\sigma_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - \sigma_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \mathscr{A}(U_\alpha \cap U_\beta)$, причем наборы $(\{U_\alpha\}, \{\sigma_\alpha\})$ и $(\{V_\beta\}, \{\tau_\beta\})$ эквивалентны, если для любой точки $p \in U$ и $U_\alpha \ni p$, $V_\beta \ni p$ найдётся такая окрестность $W \ni p$, что $W \subset U_\alpha \cap V_\beta$ и $\sigma_\alpha|_W - \tau_\beta|_W \in \mathscr{A}(W)$.

Задача 2. Для морфизма пучков $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G}$ положим $\ker f(U) = \ker f_U$, где $f_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$. Проверьте, что $\ker f$ является пучком.

Задача 3. Для морфизма пучков $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G}$ определим $\operatorname{coker} f$ как факторпучок $\mathscr{G}/f(\mathscr{F})$.

а) «Расшифруйте» определение коядра конструктивно, как определение факторпучка в задаче 1.

б) Проверье, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

точна тогда и только тогда, когда 1) α является вложением, то есть α_U являются вложениями для любого открытого множества U, 2) $\mathscr{E} = \ker \beta$ (так как α вложение, то мы отождествляем $\mathscr{E}$ и $\alpha(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}$), 3) $\mathscr{G}$ изоморфно $\operatorname{coker} \alpha$, а β при этом изоморфизме является естественной проекцией.

Задача 4. Пусть X связное хаусдорфово пространство, a и b две различные точки X, J подпучок $\mathbb{Z}$, состоящий из элементов, равных нулю в a и b.

а) Найдите $(\mathbb{Z}/J)_x$.

б) Докажите, что последовательность

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/J \longrightarrow 0$$

точна.

в) Докажите, что при этом индуцированное отображение

$$\Gamma(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}/J)$$

не сюръективно.

Задача 5. Докажите, что локально постоянные пучки ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и так далее) на хаусдорфовом пространстве X, таком что у него есть хотя бы одна связная компонента, содержащая более одной точки, не являются ни мягкими, ни тонкими.

Задача 6. Докажите, что пучок $\mathscr{O}_\mathbb{C}$ голоморфных функций на комплексной плоскости не является ни мягким, ни тонким.

Указание: рассмотреть ряд, сходящийся в единичном круге, но не продолжающийся аналитически за его пределы вроде $\sum\limits_n z^{n!}$.