**НМУ, Комплексно аналитические многообразия
и голоморфные расслоения. Листок 8.
Расслоения и характеристические классы. 4.12.2017.**

**Задача 1.** Как известно, первый класс Чженя $c_1$ от расслоений над базой $M$, который мы определили с помощью форм кривизны связностей по Чженю-Вейлю, можно рассматривать как отображение $c_1 = j \circ \delta$,

$$\begin{tikzcd} H^1(M, \mathscr{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "c_1"] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[d, "j"] \\ & H^2(M, \mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

где $j$ естественное отображение, а $\delta$ гомоморфизм Бокштейна в длинной точной последовательности в когомологиях, индуцированной из короткой точной последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \longrightarrow 0,$$

поэтому мы отождествляем $c_1$ и $\delta$.

Докажите, что образ $c_1 = \delta$ в $H^2(M, \mathbb{Z})$ является в точности прообразом $j^{-1}(H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}))$ пространства $H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}) \subset H^2(M, \mathbb{R})$, порожденного когомологическими классами, у которых есть представители в виде форм типа $(1, 1)$.

*Указание. Используйте то, что форма кривизны канонической связности имеет тип* $(1, 1)$, *и докажите, что* $j^{-1}(H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}))$ *лежит в ядре отображения*

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathscr{O})$$

*из вышеупомянутой длинной точной последовательности.*

**Задача 2.** Используя второй класс Чженя $c_2$, докажите, что универсальное расслоение $\gamma^2$ над многообразием Грассмана $G_2(\mathbb{C}^3)$ нетривиально.

*Указание. Докажите, что число Чженя*

$$\langle c_2(\gamma^2), [G_2(\mathbb{C}^3)] \rangle := \int_{G_2(\mathbb{C}^3)} c_2(\gamma^2)$$

*не равно нулю.*