Экзамен

Для получения оценки 5 достаточно набрать 15 баллов, 4 — 11 баллов, 3 – 8 баллов. Работы необходимо сдать до 15:30 26.12.2017 либо оставив на вахте НМУ, либо прислав решения на почту alex_omsk@211.ru.

1. Рассмотрим $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.Пусть $q^n \neq 1$. Пусть $M(\lambda)$ — модуль Верма. Пусть имеется точная последовательность $0 \to M(\lambda') \to M \to M(\lambda) \to 0$. Здесь $\lambda, \lambda' \in \{q^n | n \in \mathbb{Z}\}$.
а) [1 балл] Для каких пар (λ, λ') необходимо, чтобы $M \simeq M(\lambda) \oplus M(\lambda')$?
б) [2 балла] Приведите пример модуля M, такого, что

$$0 \to M(\lambda) \to M \to M(\lambda) \to 0,$$

но $M \not\simeq M(\lambda) \oplus M(\lambda)$.

2. Найдите центр $U_q(sl_2)$ при а) [2 балла] $q^n \neq 1$; б) [2 балла] $q^n = 1$.

3. [2 балла] Пусть q – примитивный корень из 1, l – нечётно, $l \geqslant 3$, поле $\Bbbk$ — алгебраически замкнуто. Найдите все конечномерные простые U_q – модули, на которых центр $U_q(sl_2)$ действует одинаковым скаляром.

4. [3 балла] Рассмотрим $U_q(so(5))$, $q^n \neq 1$. Пусть α, β — простые корни. Опишите явно модуль $L(\alpha + 2\beta)$, то есть конечномерный неприводимый модуль старшего веса $\alpha + 2\beta$.

5. Рассмотрим $U_q(\mathfrak{g})$. Пусть $\rho = \dfrac{1}{2}\sum_{\gamma>0}\gamma$.
а)[1 балл] Докажите, что $S^2(u) = K_{2\rho}^{-1} u K_{2\rho}$.
б)[2 балла] Пусть M — конечномерный модуль. Докажите, что

$$tr_q : End_{\Bbbk}(M) \to \Bbbk, \varphi \to tr(\varphi \circ K_{2\rho}^{-1})$$

— гомоморфизм U_q — модулей. Здесь $\Bbbk$ — тривиальный U_q — модуль.

6. Для алгебры Хопфа $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ определим присоединённое представление ad алгебры на самой себе:

$$\mathrm{ad}(a)(b) = \sum_i a_i b S(a_i'), \text{ если } \Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a_i'.$$

Напомним так же, что примитивным элементов алгебры Хопфа называется такой элемент u, что $\Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$, а групповым такой g, что $\Delta(g) = g \otimes g$.
а)[1 балл] Пусть u — примитивный элемент, а g — групповой элемент алгебры Хопфа. Найдите $\mathrm{ad}(u)(b)$ и $\mathrm{ad}(g)(b)$.
б) [1 балл] Докажите, что центр $U_q(\mathfrak{g})$ — это в точности инварианты присоединенного представления.

6. [2 балла] Докажите, что $L(\lambda)^* \simeq L(-w_0\lambda)$, где $w_0 \in W$ — самый длинный элемент группы Вейля W. Здесь $L(\lambda)$ — неприводимое конечномерное представление веса λ для $U_q(\mathfrak{g})$.

7. Пусть $R \in M_{n^2}(\mathbb{C})$ — комплексная матрица $n^2 \times n^2$. Определим алгебру $U(R)$ следующим образом:
$n(n+1)$ образующих t_{ij}^+ и t_{ji}^-, $i \leqslant j$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Соотношения:

$$T_1^{\pm} T_2^{\pm} R = R T_2^{\pm} T_1^{\pm},\ T_1^- T_2^+ R = T_2^+ T_1^- R,\ t_{ii}^+ t_{ii}^- = t_{ii}^- t_{ii}^+ = 1\ \forall\ i = 1, \ldots n.$$

Здесь $T_1^{\pm} = T^{\pm} \otimes id, T_2^{\pm} = id \otimes T^{\pm}$, $T^{\pm} = (t_{ij}^{\pm})_{i,j=1,\ldots,n}$. Здесь $t_{ij}^+ = t_{ji}^- = 0$ при $i > j$.

Зададим следующие отображения:

$$\Delta(t_{ij}^{\pm}) = \sum_l t_{il}^{\pm} t_{lj}^{\pm},\ \varepsilon(t_{ij}^{\pm}) = \delta_{ij},\ S(T^{\pm}) = (T^{\pm})^{-1}.$$

а)[1 балл] Докажите, что $(U(R), \Delta, \varepsilon, S)$ — алгебра Хопфа.
б)[2 балла] Пусть теперь R — универсальная R — матрица для sl_2. Положим $R = (\rho \otimes \rho) R^f$. Покажите, что если ρ – двумерное неприводимое представление $L(1, +)$, то при $f(q, q) = q$,

$$R = q(E_{11}E_{11} + E_{22}E_{22}) + (E_{11}E_{22} + E_{22}E_{11}) + (q - q^{-1})E_{12}E_{21}.$$

Докажите, что в этом случае $U(R) \simeq U_q(sl_2, \Lambda)$, где Λ — решётка весов (q — не корень из 1).

8. Пусть $(H, \Delta, \varepsilon, S)$ — алгебра Хопфа. Для любого конечномерного модуля V, пусть $v \in V, f \in V^*$. Положим $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис V, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — двойственный базис V^*. Определим матричные коэффициенты

$$c_{f,m}(u) = f(um)\ \forall\ u \in H.$$

Обозначим через H_0 подпространство, натянутое на все матричные коэффициенты.

а) [1 балл] Докажите, что H^* — алгебра с единицей, а H_0 — подалгебра H^*.
Определим

$$\Delta'(c_{f,m}) = \sum_i c_{f,e_i} \otimes c_{f_i,m} \in H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*.$$

б) [2 балла] Докажите, что $(H_0, \Delta', \varepsilon^*, S^*)$ — алгебра Хопфа. В случае $H = U_q(\mathfrak{g})$, H_0 обозначается через $\Bbbk_q[G]$ — квантовый аналог алгебры полиномиальных функций на группе.
в) [3 балла] Для $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ задайте явно алгебру $\Bbbk_q[SL_2]$ образующими и соотношениями.