Тензорные категории и R - матрица для $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Опр. *Пусть $\mathcal{C}$ – категория и $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ – функтор, называемые тензорным произведением. Категория называется тензорной, если выполнены следующие условия:*
1) Задан некоторый изоморфизм функторов $a : \otimes(\otimes\times \mathrm{id}\,) \to \otimes(id\times\otimes)$.
2) Выполнена аксимома пятиугольника: для любых объектов U, V, W, X

$$a_{U,V,W\otimes X}\circ a_{U\otimes V,W,X} = (\mathrm{id}_U \otimes a_{V,W,X})\circ a_{U,V\otimes W,X}\circ a_{U,V,W\otimes \mathrm{id}_X}.$$

3) Имеется объект I, для которого заданы естественные изоморфизмы $l : \otimes(I\times\mathrm{id}\,) \to \mathrm{id}$ и $r : \otimes(\mathrm{id}\,\times I) \to \mathrm{id}$.
4) Выполнена аксиома треугольника: для любых объектов V, W выполнено

$$(\mathrm{id}_V \otimes l_W)\circ a_{V,I,W} = r_V\otimes \mathrm{id}_W.$$

Тензорная категория называется строгой, если a, l, r задаются тождественными морфизмами.

Замечание. *Верна следующая теорема: любая тензорная категория эквивалента некоторой строгой тензорной категории.*

1. Напишите все условия того, что категория является тензорной, в виде коммутативных диаграмм. Введите на категории $Vect\,\Bbbk$ векторных пространств над $\Bbbk$ структуру тензорной категории.
2. Убедитесь, что категория конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, q - не корень из 1, $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ является тензорной категорией.

Опр. *Пусть $\mathcal{C}$ – тензорная категория. Пусть $\tau : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ – переставляющий функтор, то есть $\tau(U, V) = (V, U)$ для любых двух объектов U, V. Тензорная категория называется сплетённой, если выполнено следующее:*
1) Имеется изоморфизм функторов $c : \otimes \to \otimes\tau$.
2) Выполнена аксиома шестиугольника: для любых объектов U, V, W верно, что

$$a_{V,W,U}\circ c_{U,V\otimes W}\circ a_{U,V,W} = c_{U,V\otimes \mathrm{id}_W}\circ a_{V,U,W}\circ(\mathrm{id}_V\otimes c_{U,W}),$$

$$a^{-1}_{W,U,V}\circ c_{U\otimes V,W}\circ a^{-1}_{U,V,W} = c_{U,W\otimes \mathrm{id}_V}\circ a^{-1}_{U,W,V}\circ(\mathrm{id}_U\otimes c_{V,W}).$$

3. Напишите аксиомы сплетённой категории в виде диаграмм и упростите условие шестиугольника в случае строгой категории.
4. Убедитесь, что в сплетённой категории выполнено категорное уравнение Янга-Бакстера: для любых объектов U, V, W

$$\begin{gathered} a_{W,V,U}\circ(c_{V,W}\otimes \mathrm{id}_U)\circ a^{-1}_{V,W,U}\circ(\mathrm{id}_V\otimes c_{U,W})\circ a_{V,U,W}\circ(c_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W) = \\ = (\mathrm{id}_W\otimes c_{U,V})\otimes a_{W,U,V}\otimes(c_{U,W}\otimes \mathrm{id}_V)\circ a^{-1}_{U,W,V}\circ(\mathrm{id}_U\otimes c_{V,W})\circ a_{U,V,W}. \end{gathered}$$

Запишите это уравнение в строгой категории.

Опр. *Алгебра Хопфа A называется сплетённой (квазитреугольной), если*
1) существует такой обратимый элемент $R\in A\otimes A$, такой что $\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$. Здесь $\Delta^{op} = \Delta\circ\tau$, где $\tau(u\otimes v) = v\otimes u\ \forall\, u, v\in A$.
2) $(\Delta\otimes \mathrm{id}_A)(R) = R_{13}R_{23}$ и $(\mathrm{id}_A\otimes\Delta)(R) = R_{13}\circ R_{12}$. Здесь, если $R = \sum_i a_i\otimes b_i$, то $R_{13} = \sum_i a_i\otimes 1\otimes s_i$, остальные аналогично.

5. Докажите, что категория всех A - модулей является сплетённой тогда и только тогда, когда A – сплетённая алгебра Хопфа.

Далее рассмотрим категорию конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, q - не корень из 1, $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$. Определим элемент $R_n = a_n F^n \otimes E^n$, $a_n = (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \dfrac{(q-q^{-1})^n}{[n]!}$. Для любых конечномерных модулей определим $R = \sum_{n\geqslant 0} R_n$.

6. Докажите, что R – корректно определено и биективно. Проверьте, что $a_n a_m = q^{nm} \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix} a_{n+m}$.

Вспомним, что все веса в конечномерное модуле имеют вид

$$\Lambda = \{\pm q^a | a \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть имеется функция $f : \Lambda \times \Lambda \to \Bbbk^*$, так что $f(\lambda,\mu) = \lambda f(\lambda, \mu q^2) = \mu f(\lambda q^2, \mu)\ \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda$. Определим морфизм $\tilde{f}$ модулей M, N: $\tilde{f} : M \otimes N \to N \otimes M, m \otimes n \to f(\lambda,\mu) n \otimes m$. Положим $R^f = R \circ \tilde{f}$.

7. Докажите, что
1) $(R^f)^{-1} \circ \Delta(u) \circ R^f = \Delta^{op}(u)$.
2) Для любых двух модулей M, N определим $P : M \otimes N \to N \otimes M, m \otimes n \to n \otimes m$. Тогда $R^f \circ P : M \otimes N \to N \otimes M$ – изоморфизм.

Пусть M, N, K – U_q- модули. Пусть дополнительно f обладает следующими свойствами: $f(\lambda, \mu\nu) = f(\lambda,\mu) f(\lambda,\nu)$ и $f(\lambda\mu, \nu) = f(\lambda,\nu) f(\mu,\nu)$ для любых весов этих модулей . Определим категорию конечномерных представлений типа 1 как категорию, у которой все веса имеют вид $\{q^a | a \in \mathbb{Z}\}$.

8. Докажите, что категория конечномерных представлений типа 1 является сплетённой, где $c = R^f \circ P$.

9. Найдите необходимое и достаточное условие для существования такого f.

Опр. *Пусть V – конечномерное векторное пространство. Квантовым уравнением Янга-Бакстера называется уравнение в $End(V)^{\otimes 3}$:*

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}.$$

Из задач 4 и 8 следует, что для любого модуля типа 1, R^f – решение уравнения Янга-Бакстера.

10. Положим $R = (\rho \otimes \rho) R^f$. Покажите, что если ρ – двумерное неприводимое представление $L(1,+)$, то при $f(q,q) = q$,

$$R = q(E_{11}E_{11} + E_{22}E_{22}) + (E_{11}E_{22} + E_{22}E_{11}) + (q-q^{-1}) E_{12} E_{21}.$$

Определим алгебру Хопфа $U_q^R(\mathfrak{sl}_2)$ как алгебру, порождённую $t_{ij}, \bar{t}_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant 2$ со следующими соотношениями:

$$t_{12} = \bar{t}_{21} = 0,\ t_{11}\bar{t}_{11} = t_{22}\bar{t}_{22} = 1, t_{11}t_{22} = 1, \bar{t}_{11}\bar{t}_{22} = 1,$$

$$RT_1T_2 = T_2T_1R,\ R\bar{T}_1\bar{T}_2 = \bar{T}_2\bar{T}_1R,\ R\bar{T}_1T_2 = T_2\bar{T}_1R,$$

где $T = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes t_{ij}, \bar{T} = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes \bar{t}_{ij}$.
Коумножение: $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj},\ \Delta(\bar{t}_{ij}) = \sum_k \bar{t}_{ik} \otimes \bar{t}_{kj}$,
Коединица: $\varepsilon : T \to 1, \bar{T} \to 1$,
Антипод: $S : T \to T^{-1}, \bar{T} \to \bar{T}^{-1}$.

Докажите, что эта алгебра изоморфна алгебре Хопфа $U_q(\mathfrak{sl}_2, \Lambda)$, где Λ - решётка весов.

Замечание. *Аналогичное построение работает и для $U_q(\mathfrak{sl}_n, \Lambda)$.*