Алгебра $U_q(\mathfrak{g})$ и её представления.

Пусть $\Bbbk$ — поле, $\operatorname{char} k \neq 2$ и $\operatorname{char} k \neq 3$ в случае $G_2 \subset \Phi$. Пусть Φ — система корней, соответствующая полупростой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, Δ — простые корни, $(\,,\,)$ — такое скалярное произведение, что $(\alpha,\alpha)=2$ для коротких корней. Тогда для систем корней B_n, C_n, F_4 имеется корень, такой что $(\alpha,\alpha)=4$, а для G_2 — такой, что $(\alpha,\alpha)=6$. Положим $d_\alpha = \dfrac{(\alpha,\alpha)}{2} \in \{1,2,3\}$. Положим $[a]_\alpha = [v]_{v=q_\alpha} = \dfrac{q_\alpha^a - q_\alpha^{-a}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}$. Определим по аналогии $[n]_\alpha!$ и $\begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix}_\alpha$. Выберем $q \in \Bbbk, q^{2d_\alpha} \neq 1$.

Опр. *Квантовой универсальной обёртывающей алгеброй $U_q(\mathfrak{g})$ называют ассоциативную алгебру с единицей, порожденную $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha, K_\alpha^{-1}, \alpha \in \Delta$ со следующими соотношениями для любых $\alpha, \beta \in \Delta$:*

$$K_\alpha K_\alpha^{-1} = K_\alpha^{-1} K_\alpha = 1, \qquad K_\beta K_\alpha = K_\alpha K_\beta; \tag{1}$$

$$K_\alpha E_\beta K_\alpha^{-1} = q^{(\alpha,\beta)} E_\beta; \tag{2}$$

$$K_\alpha F_\beta K_\alpha^{-1} = q^{-(\alpha,\beta)} F_\beta; \tag{3}$$

$$E_\alpha F_\beta - F_\beta E_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \frac{K_\alpha - K_\alpha^{-1}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}. \tag{4}$$

и соотношениями для $\alpha \neq \beta$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_\alpha E_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}} E_\beta E_\alpha^s = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_\alpha F_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}} F_\beta F_\alpha^s = 0. \tag{6}$$

Тут $a_{\alpha\beta} = \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} := \langle \alpha, \beta \rangle$.

Опр. *Определим алгебру $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ как алгебру, которая порождена теми же элементами, что и $U_q(\mathfrak{g})$ и соотношениями (1)-(4).*

Для любого элемента из $\lambda \in \mathbb{Z}\Phi$(решётки весов) будем рассматривать $K_\lambda = \prod_{\beta\in\Delta} K_\beta^{m_\beta}$. Здесь $\lambda = \sum_{\beta\in\Delta} m_\beta \beta$. Очевидно, что $K_\lambda K_\mu = K_\mu K_\lambda$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}\Phi$.

1. Проверьте, что

1) $K_\lambda K_\mu = K_\mu K_\lambda$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}\Phi$;
2) $K_\lambda E_\beta K_\lambda^{-1} = q^{(\lambda,\beta)} E_\beta$ и $K_\lambda F_\beta K_\lambda^{-1} = q^{-(\lambda,\beta)} F_\beta$;
3) Отображения

$$U_{q_\alpha}(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{g}) \text{ и } U_q(\mathfrak{sl}_2) \to \tilde{U}_q(\mathfrak{g}),\ E \to E_\alpha, F \to F_\alpha, K \to K_\alpha, K^{-1} \to K_\alpha^{-1}$$

является гомоморфизмом алгебр (на самом деле — изоморфизмами на образ);
4) Отображение ω такое, что $\omega(E_\alpha) = F_\alpha, \omega(F_\alpha) = E_\alpha, \omega(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}$ для любого $\alpha \in \Delta$ задаёт автоморфизм алгебр $U_q(\mathfrak{g})$ и $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$, причём $\omega^2 = 1$. Отображение τ такое, что $\tau(E_\alpha) = F_\alpha, \tau(F_\alpha) = E_\alpha, \tau(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}$ задаёт антиавтоморфизм тех же алгебр, причём $\tau^2 = 1$;
5) Алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ и $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ $\mathbb{Z}\Phi$-градуированны, где $\deg E_\alpha = 1, \deg F_\alpha = -1, \deg K_\alpha = 0 = \deg K_\alpha^{-1}$.

Алгебра $U_q(\mathfrak{g})$ имеет следующую структуру алгебры Хопфа, согласованную с гомоморфизмами $U_{q_\alpha}(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{g})$:

$$\Delta(E_\alpha) = E_\alpha \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_\alpha, \quad \varepsilon(E_\alpha) = 0, \quad S(E_\alpha) = -K_\alpha^{-1} E_\alpha,$$

$$\Delta(F_\alpha) = F_\alpha \otimes K_\alpha^{-1} + 1 \otimes F_\alpha, \quad \varepsilon(F_\alpha) = 0, \quad S(E_\alpha) = -F_\alpha K_\alpha,$$

$$\Delta(K_\alpha) = K_\alpha \otimes K_\alpha, \qquad \varepsilon(K_\alpha) = 1, \qquad S(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}.$$

2*. Проверьте, что так заданные Δ, ε, S задают структуру алгебры Хопфа на $U_q(\mathfrak{g})$.

Указание. *Это легко проверить для $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$. Теперь нужно доказать, что $\Delta(u_\alpha^\pm) \in \tilde{I}\otimes\tilde{U}_q(\mathfrak{g})+\tilde{U}_q(\mathfrak{g})\otimes I$ и $S(u_\alpha^\pm) \in I$, где $u_\alpha^\pm$ – правая часть соотношений (5) и (6) соответственно, а I — двусторонний идеал в $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ порожденный всеми $u_\alpha^\pm$.*

3. Докажите, что $S^2(u) = K_{2\rho}^{-1} u K_{2\rho}$ для любых $u \in U_q(\mathfrak{g})$. Здесь $\rho = \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ — полусумма всех положительных корней. Так же выпишите формулы для

$$\Delta(E_\alpha^r), \Delta(F_\alpha^r), S(E_\alpha)^r, S(F_\alpha^r), E_\alpha F_\alpha^r, F_\alpha E_\alpha^r.$$

4. Для алгебры Хопфа $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ определим присоединённое представление ad алгебры на самой себе:

$$\mathrm{ad}(a)(b) = \sum_i a_i b S(a_i'), \text{ если } \Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a_i'.$$

Напомним так же, что примитивным элементов алгебры Хопфа называется такой элемент u, что $\Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$, а групповым такой g, что $\Delta(g) = g \otimes g$. Пусть u — примитивный элемент, а g — групповой элемент алгебры Хопфа. Найдите $\mathrm{ad}(u)(b)$ и $\mathrm{ad}(g)(b)$.

5. Проверьте, что в $U_q(\mathfrak{g})$ верно следующее

$$\mathrm{ad}(E_\alpha^r)(E_\beta) = u_{\alpha\beta}^+ \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ad}(F_\alpha^r)(F_\alpha K_\beta) = u_{\alpha\beta}^- K_\beta K_\alpha^r.$$

На лекции было доказано, что имеет место так называемое *треугольное разложение* алгебры $U_q(\mathfrak{g})$, а именно

$$U^+ \otimes U^0 \otimes U^- \simeq U_q(\mathfrak{g}),\ u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \to u_1 u_2 u_3.$$

Изоморфизм понимается как изоморфизм векторных пространств.

Здесь U^+ — алгебра, порождённая всеми $E_\alpha, \alpha \in \Delta$, U^- — порождённая всеми $F_\alpha, \alpha \in \Delta$, U^0 — порождённая всеми $K_\mu, \mu \in \mathbb{Z}\Phi$.

Более того, U^+ — это алгебра, порождённая E_α с соотношением (5), U^- — алгебра, порождённая F_α с соотношением (6), U^0 — коммутативная алгебра с базисом $\{K_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}\Phi\}$.

6. Пользуясь треугольным разложением, докажите, что все гомоморфизмы $U_{q_\alpha}(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{g})$ на самом деле являются вложениями.

Определим решётку весов Λ как такие элементы $\lambda \in E$, что $\langle\lambda, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Delta$. Будем называть вес *доминантным*, если $\langle\lambda, \alpha\rangle \geqslant 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Через ω_α будем обозначать фундаментальные доминантные веса, то есть такие, что $\langle\omega_\alpha, \beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$. Далее считаем, что q — не корень из 1.

7. Пусть M — конечномерный $U_q(\mathfrak{g})$-модуль. Докажите, что

$$M = \bigoplus_{\lambda,\sigma} M_{\lambda,\sigma},$$

где $M_{\lambda,\sigma} = \{m \in M \mid K_\mu m = \sigma(\mu) q^{(\lambda,\mu)} m \ \forall\ m \in \mathbb{Z}\Phi\}$, $\lambda \in \Lambda$, а $\sigma : \mathbb{Z}\Phi \to \{1, -1\}$— групповой гомоморфизм.

8. Из задачи 7 следует, что любой модуль является суммой

$$M = \bigoplus_\sigma M^\sigma, \qquad M^\sigma = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_{\lambda,\sigma}.$$

Будем называть конечномерный модуль модулем типа σ, если $M = M^\sigma$ и типа **1**, если $\sigma \equiv 1$. Докажите, что категория конечномерных представлений является прямой суммой категорий представлений типа σ и что категория представлений типа σ эквивалентна категории представлений типа **1**. Проверьте, что категория представлений типа **1** замкнута относительно тензорных произведений и взятия двойственного представления и взятия Hom'ов между представлениями.

В дальнейшем будем обозначать $M_{\lambda,1}$ через M_λ.

9. Докажите, что любой конечномерный модуль типа **1** содержит *старший вектор*, то есть такой $v \in M_\lambda$, $v \neq 0$, что $E_\alpha v = 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Более того, в этом случае λ — доминантный вес и $F_\beta^{m(\beta)+1} v = 0$, где $m(\beta) = \langle\lambda, \beta\rangle$.

Пусть $\lambda \in \Lambda$ и пусть J_λ — левый идеал $U_q(\mathfrak{g})$, порождённый всеми $E_\alpha, \alpha \in \Delta$ и $K_\alpha - q^{(\lambda,\alpha)}$, то есть

$$J_\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} U_q E_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta} U_q(K_\alpha - q^{(\lambda,\alpha)}).$$

Определим *модуль Верма* $M(\lambda)$ следующим образом

$$M(\lambda) = U_q(\mathfrak{g})/J_\lambda.$$

Класс 1 обозначим через v_λ. Ясно, что v_λ является старшим весом веса λ и порождает модуль $M(\lambda)$, то есть

$$E_\alpha v_\lambda = 0 \quad K_\alpha v_\lambda = q^{(\lambda,\alpha)} v_\lambda \ \forall \ \alpha \in \Delta.$$

10. Докажите следующий свойства модуля Верма $M(\lambda)$.
1) Модуль Верма обладает универсальным свойством: для любого модуля M и $v \in M_\lambda$ такого, что $E_\alpha v = 0 \ \forall \ \alpha \in \Delta$ существует единственный гомоморфизм $\phi : M(\lambda) \to M$, такой что $\phi(v_\lambda) = v$;
2) Отображение $U^- \to M(\lambda), u \to uv_\lambda$ — биекция. Выведите отсюда, что размерности весовых подпространств $M(\lambda)_\mu$ — конечномерны, и что все веса $M(\lambda)$ удовлетворяют условию $\mu < \lambda$. (Говорим, что вес $\lambda > \mu$, если $\lambda - \mu = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha, k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \ \forall \ \alpha \in \Delta$);
3) $M = \bigoplus_\mu M_\mu$;
4) Докажите, что любой подмодуль модуля Верма – прямая сумма своих весовых подпространств;
5) Существует единственный максимальный подмодуль модуля Верма $M(\lambda)$ и единственный простой модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ;
6) Если простой модуль $M(\lambda)$ — конечномерный, то λ — доминантный вес;
7) $\mathrm{End}_U M(\lambda) = \mathrm{End}_U L(\lambda) = \Bbbk$.

11. Пусть $\lambda \in \Lambda$. И пусть $\alpha \in \Delta$ такой, что $(\lambda, \alpha) > 0$. Положим $n = \langle\lambda,\alpha\rangle$. Тогда существует гомоморфизм $\varphi_\alpha : M(\lambda - (n+1)\alpha) \to M(\lambda)$ такой, что $\varphi_\alpha(v_{\lambda-(n+1)\alpha}) = F_\alpha^{n+1}\alpha$.

12. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Для любого $\alpha \in \Delta$ выберем целые $n(\alpha), m(\alpha) > 0$. Пусть I — идеал, порождённый $E_\alpha^{m(\alpha)}, F_\alpha^{n(\alpha)}$ и $K_\alpha - q^{(\lambda,\alpha)}$. Тогда E_α, F_α — действую локально нильпотентно на U_q.

13. Пусть V — конечномерный $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модуль, такой что $V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, где $V_n = \{v \in V \mid Kv = q^n v\}$. Предположим, что E, F действуют локально нильпотентно на V, причём $\dim V_n < \infty \ \forall \ n$. Тогда V — конечномерный и $\dim V_n = \dim V_{-n}$.

С помощью задач 12 и 13 и действия группы Вейля W на весах, на лекции было доказано, что если λ — доминантный вес, то $\tilde{L}(\lambda) = M(\lambda)/\sum_{\alpha\in\Delta}\varphi_\alpha$ — конечномерный модуль, откуда следует, что и $L(\lambda)$ — конечномерный. Более того, на самом деле $L(\lambda) = \tilde{L}(\lambda)$. На лекции это было доказано для $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ и q — трансцендентно над $\mathbb{Q}$.

14*. Пусть $U = U(\mathfrak{g})$ — универсальная обёртывающая алгебра полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
а) Докажите, что если $u \in U$ такой, что u действует нулем в любом конечномерном модуле, то $u = 0$.
б) Докажите, что если $u \in U_q(\mathfrak{g})$ такой, что u действует нулем в любом конечномерном модуле, то $u = 0$.

15. Докажите, что $L(\lambda)^* \simeq L(-w_0\lambda)$, где $w_0 \in W$ — самый длинный элемент группы Вейля W.

16. Пусть A_R — алгебра, заданная образующими и соотношениями над коммутативным кольцом R, $S \supset R$ — коммутативное кольцо и пусть A_S — алгебра заданная теми же образующими и соотношениями, но над S. Тогда $A_R \otimes_R S \simeq A_S$.

17. Докажите, что для доказательства того, что любой конечномерный модуль является суммой полупростых, достаточно показать, что любое расширение

$$0 \to L(\lambda) \to M \to L(\mu) \to 0,$$

расщепляется.

18. Пусть g — полупростая комплексная алгебра Ли и пусть $M(\lambda)$ — модуль Верма. Докажите, что $\dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$, где $P : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — число способов представить $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ в виде суммы $\sum_{\alpha>0} k_\alpha\alpha,\ k_\alpha \geqslant 0 \ \forall\alpha \in \Delta$ — функция Костанта, $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра.