Топологические пространства

Задача 2.1. Замкнутое подпространство компакта — компакт.

Задача 2.2. Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто в нем.

Задача 2.3. а) Непрерывное биективное отображение из компактного пространства в хаусдорфово — гомеоморфизм.
б) Существенно ли требование хаусдорфовости?

Задача 2.4 (Определение вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$). Три следующих пространства гомеоморфны:
а) прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат; б) S^n с отождествленными противоположными точками; в) D^n с отождествленными противоположными точками на границе.

Задача 2.5 (Определение комплексного проективного пространтва $\mathbb{C}P^n$). Два следующих пространства гомеоморфны:
а) прямые в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящие через начало координат;
б) фактор пространство сферы S^{2n+1} по следующему действию окружности: для $z \in S^1$, $z\colon (z_0, \dots, z_n) \mapsto z(z_0, \dots, z_n)$.

Задача 2.6. Пусть X, Y — компактные топологические пространства. Докажите, что а) $X \times Y$; б) $X/{\sim}$, где $\sim$ — какое-то отношение эквивалентности; компактны.

Задача 2.7. Следующие пространства компактны а) S^n; б) $\mathbb{R}P^n$.

Задача 2.8. а) $C(X) \cong X * \{0\}$, $\Sigma X \cong X * \{0, 1\}$; б) $S^n * S^m \cong S^{m+n+1}$.

Задача 2.9. а) $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$; б) симметрический квадрат S^1 гомеоморфен листу Мёбиуса; в*) симметрический квадрат S^2 гомеоморфен $\mathbb{C}P^2$.