

## Гомотопическая эквивалентность

**Задача 6.1.** Любое не сюръективное отображение в  $\mathbb{S}^n$  гомотопно постоянному.

**Задача 6.2.** Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна окружности.

**Задача 6.3.** Докажите, что сфера с  $g$  ручками и  $n$  выколотыми точками гомотопически эквивалентна букету окружностей, и найдите число этих окружностей.

**Задача 6.4.** Пространство  $\mathbb{R}P^n$  без точки гомотопически эквивалентно  $\mathbb{R}P^{n-1}$ .

**Задача 6.5.** Сфера  $S^2$  с двумя отождествленным точками гомотопически эквивалентна  
а) сфере с добавленным отрезком, соединяющим эти две точки; б) букету  $S^2 \vee S^1$ .

**Задача 6.6.** а) Если в графе стянуть ребро, получится граф, гомотопически эквивалентный исходному.

б) Приведите пример топологического пространства  $X$  и такого стягиваемого подпространства  $A \subset X$ , что  $X$  и  $X/A$  гомотопически *не* эквивалентны.

**Задача 6.7.** Докажите, что дополнение к координатным осям а) в  $\mathbb{R}^3$ ; б) в  $\mathbb{C}^3$  гомотопически эквивалентно букету сфер.

**Задача 6.8.** Пусть  $\mathbb{R}^\infty$  — множество финитных (обращающихся с какого-то момента в ноль) последовательностей вещественных чисел с евклидовой метрикой;  $\mathbb{S}^\infty$  — сфера в этом пространстве (все точки на расстоянии 1 от нуля). Докажите, что сфера  $\mathbb{S}^\infty$  стягиваема.

\* \* \*

**Задача 6.9.** Пространства  $Y$  и  $Y'$  гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда «при рассмотрении отображений с точностью до гомотопии они неотличимы»: для каждого пространства  $X$  есть (естественный по  $X$ ) изоморфизм  $[X, Y] \cong [X, Y']$ .