ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Отображения из окружности в окружность.

Рассмотрим отображение $p : \mathbb{R} \to S^1$, заданное формулами $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$; здесь S^1 — окружность единичного радиуса на плоскости с центром в начале координат. Отображение p непрерывно, но не взаимно однозначно: прооообраз $p^{-1}(a)$ любой точки представляет собой бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с шагом 1: если $p(t_0) = a \in S^1$, то $p^{-1}(a) = \{t_0+k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Прообраз дуги $p^{-1}((a, b))$ представляет собой объединение интервалов одинаковой длины (меньшей 1): $p^{-1}((a, b)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(t_0 + k, s_0 + k)$, где $p(s_0) = b$, $|s_0 - t_0| < 1$. Ограничение отображения p на каждый такой интервал является гомеоморфизмом: $p_{t_0,s_0} \stackrel{\text{def}}{=} p|_{(t_0,s_0)} : (t_0, s_0) \to (a, b) \subset S^1$ имеет непрерывное обратное отображение $p^{-1}_{t_0,s_0} : (a, b) \to (t_0, s_0)$ (проверьте!). Ограничение p на интервалы длины, большей 1, не имеет обратного, т.к. не взаимно однозначно.

Теорема 1 (лемма о поднятии)**.** *Для любого n, произвольного непрерывного отображения куба $f : [0, 1]^n \to S^1$ и любой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ такой, что $p(t_0) = f(0, \dots, 0)$, существует и единственно непрерывное отображение $F : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ (поднятие f) такое, что $p \circ F = f$ и $F(0, \dots, 0) = t_0$.*

Прежде чем доказывать лемму о поднятии, выведем из нее следствия.

Следствие 1. *Если $\tilde{F} : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ — произвольное поднятие отображения f (т.е. $p \circ \tilde{F} = f = p \circ F$), то существует константа $k \in \mathbb{Z}$ такая, что $\tilde{F}(x) = F(x) + k$ для всех $x \in [0, 1]^n$.*

Доказательство следствия 1. Пусть $k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(0, \dots, 0) - F(0, \dots, 0)$; поскольку $p(\tilde{F}(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = p(F(0, \dots, 0))$, имеем $k \in \mathbb{Z}$. Положим теперь по определению $\tilde{F}'(x) = F(x) + k$. Очевидно, $\tilde{F}' : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ является поднятием f: $p(\tilde{F}'(x)) = p(F(x)) = f(x)$, и $\tilde{F}(0, \dots, 0) = F(0, \dots, 0) + k = \tilde{F}(0, \dots, 0)$. Из леммы о поднятии (утверждение о единственности) вытекает теперь, что $F(x) + k = \tilde{F}'(x) = \tilde{F}(x)$ для всех $x \in [0, 1]^n$. □

Пусть $g : S^1 \to S^1$ — произвольное непрерывное отображение; рассмотрим отображение $h = g \circ p|_{[0,1]} : [0, 1] \to S^1$ (иными словами, $h(t) = g(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $0 \le t \le 1$). Пусть $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — произвольное поднятие h. Согласно следствию 1, величина $\operatorname{ind}(g) = H(1)-H(0) \in \mathbb{Z}$ целая и не зависит от выбора поднятия H, а только от самого отображения h или, что то же самое, от g (отсюда обозначение. Впрочем, мы тоже будем писать $\operatorname{ind}(h)$).

Следствие 2. *Два непрерывных отображения $g_0, g_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда их индексы совпадают:* $\operatorname{ind}(g_1) = \operatorname{ind}(g_2)$.

Доказательство. Пусть g_0 и g_1 гомотопны, $g_t : S^1 \to S^1$ — гомотопия ($0 \le t \le 1$). Обозначим, как в определении индекса, $h_t = g_t \circ p|_{[0,1]} : [0, 1] \to S^1$ и определим $H : [0, 1]^2 \to S^1$ формулой $H(t, s) = h_t(s)$. Согласно лемме о поднятии, существует и единственно непрерывное отображение $F : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ такое, что $p \circ F = H$, то есть $p(F(t, s)) = h_t(s)$. Индекс $I(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind}(h_t)$ равен $F(t, 1) - F(t, 0)$ и, следовательно, $I : [0, 1] \to \mathbb{Z}$ — непрерывное отображение. Но топология подмножества в $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ — дискретная (поскольку все одноточечные подмножества в нем открыты), а пространство $[0, 1]$ связно — следовательно, $I([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$ связен, то есть состоит из единственной точки.

Обратное утверждение: пусть $\operatorname{ind}(g_0) = \operatorname{ind}(g_1) \stackrel{\text{def}}{=} k$. Пусть $h_0 = g_0 \circ p|_{[0,1]} : [0, 1] \to S^1$ и аналогично h_1; обозначим $f_0, f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ поднятия h_0 и h_1 соответственно ($h_0 = p \circ f_0$, $h_1 = p \circ f_1$). По условию, $f_0(1) - f_0(0) = f_1(1) - f_1(0) = k$. Определим при $(t, s) \in [0, 1]^2$ точку $f_t(s) = tf_1(s) + (1 - t)f_0(s)$; тогда $f_t(1)-f_t(0) = k$ для всех t. Отображение $h_t = p\circ f_t : [0, 1] \to S^1$ непрерывно и обладает свойством $h_t(0) = h_t(1)$ при всяком $t \in [0, 1]$ (поскольку $k \in \mathbb{Z}$). Следовательно, существует непрерывное отображение $g_t : S^1 \to S^1$ такое, что $h_t = g_t \circ p|_{[0,1]}$. Как легко проверить, g_t — гомотопия, соединяющая g_0 и g_1. □

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Всякое непрерывное отображение $g : S^1 \to S^1$ гомотопно ровно одному отображению $\gamma^{(k)} : S^1 \to S^1$, заданному формулой $\gamma^{(k)}(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos k\varphi, \sin k\varphi)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отображения $\gamma^{(k)}$ с различными k друг другу не гомотопны.*

Доказательство. Поднятием $\gamma^{(k)}$ является отображение $f^{(k)} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, заданное формулой $f^{(k)}(t) = kt$ (убедитесь!). Отсюда $\operatorname{ind}\gamma^{(k)}) = k$. □

Это следствие (точнее, его второе утверждение) использовалось в лекции 1 для доказательства теоремы Брауэра в размерности 2, а также основной теоремы алгебры; в листке 1 с его помощью доказывалась "лемма о еже" — наличие нулевой точки у любого касательного векторного поля на двумерной сфере.

Доказательство теоремы 1. Докажем теорему сначала для $n = 1$. Пусть $f : [0,1] \to S^1$ — непрерывное отображение, и $p(t_0) = f(0)$. Рассмотрим множество $T \subset [0,1]$ точек t обладающих тем свойством, что у ограничения $f|_{[0,t]} : [0,t] \to S^1$ существует единственное поднятие $F^{(t)} : [0,t] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству $F^{(t)}(0) = t_0$.

Из следствия 1 вытекает, что если поднятие $F : [0,t] \to \mathbb{R}$, $F(0) = t_0$ существует, то оно единственно. Тем самым $T \subset [0,1]$ можно определить просто как множество $t \in [0,1]$ таких, что существует поднятие $F^{(t)} : [0,t] \to \mathbb{R}$.

Прежде всего, заметим, что множество T непусто: $0 \in T$. Пусть теперь $t \in T$ и $0 \le s \le t$; тогда на отрезке $[0,s]$ имеется поднятие $F^{(t)}|_{[0,s]}$. Отсюда вытекает, что $s \in T$, то есть $[0,t] \subset T$, а также, что поднятия $F^{(s)}$ и $F^{(t)}$ совпадают там, где оба определены, т.е. на отрезке $[0,s] \subset [0,t]$.

Докажем, что множество T открыто: пусть $t \in T$. Из непрерывности отображения f вытекает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $f(s) \in A$ при $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, где $A = (a,b)$ — дуга длиной $1/10$ от длины окружности, для которой $f(t) \in A$. Прообраз $p^{-1}((a,b))$ является объединением $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(u+m, v+m) \subset \mathbb{R}$, где интервалы $(u+m, v+m)$ при различных m не пересекаются. Тем самым существует единственное m, при котором $F(t) \in K \stackrel{\text{def}}{=} (u+m, v+m)$; уменьшая, при необходимости, $\varepsilon > 0$, можно добиться, чтобы $F(s) \in K$ при $s \in (t-\varepsilon, t]$. Отображение $q \stackrel{\text{def}}{=} p|_K$ — гомеоморфизм $K \to A$. Но тогда отображение $F^{(t+\varepsilon/2)} : [0, t+\varepsilon/2] \to \mathbb{R}$, которое на $[0,t]$ совпадает с $F^{(t)}$, а на $[t, t+\varepsilon/2]$ определяется равенством $F^{(t+\varepsilon/2)} = q^{-1} \circ f$, является непрерывным поднятием. Следовательно, $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset T$, что и доказывает, что T открыто.

Докажем теперь, что T замкнуто. Пусть t — предельная точка T, т.е. такая, что $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap T \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$. Как было доказано, если $t \in T$, то $[0,t] \subset T$; это означает, в частности, что $(t-\varepsilon, t) \subset T$. Уменьшая при необходимости ε, можно добиться, чтобы $f(s) \in A$ при всяком $s \in (t-\varepsilon, t)$ (дуга A — как в доказательстве открытости) и, следовательно, $F^{(s)}((t-\varepsilon, s]) \subset (u+m_s, v+m_s)$ для некоторых $m_s \in \mathbb{Z}$ (ср. с доказательством открытости T). Поскольку $F^{(s)}$ для различных s совпадают там, где определены, а интервалы $(u+m, v+m)$ при различных m не пересекаются, получаем, что все $m_s \in \mathbb{Z}$ одинаковы. Тем самым определено поднятие $F : [0,t) \to \mathbb{R}$, причем $F(s) \in (u+m, v+m) \stackrel{\text{def}}{=} K$ для некоторого фиксированного m при $t - \varepsilon < s < t$. Теперь отображение $F^{(t)}$, равное $F^{(t-\varepsilon/2)}$ на $[0, t-\varepsilon/2]$ и равное $q^{-1} \circ f$ на $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, является поднятием. Это означает, что $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset T$ и, в частности, $t \in T$. Множество, содержащее все свои предельные точки, замкнуто (докажите!), так что T замкнуто.

Поскольку T замкнуто, $U \stackrel{\text{def}}{=} [0,1] \setminus T$ открыто. Таким образом, $[0,1] = T \cup U$, где оба множества открыты и не пересекаются. Поскольку отрезок связен, а $T \neq \varnothing$, получаем $U = \varnothing$, то есть $T = [0,1]$.

Для произвольного n доказательство теоремы практически ничем не отличается: определяется множество $T \subset [0,1]^n$ точек $(x_1, \dots, x_n)$ таких, что у отображения $f[0,1]^n \to S^1$ имеется единственное непрерывное поднятие $F : [0,x_1] \times \dots \times [0,x_n] \to \mathbb{R}$, обладающее свойством $F(0,\dots,0) = t_0$. Далее доказывается, что если поднятие $F : [0,x_1] \times \dots \times [0,x_n] \to \mathbb{R}$ существует, то оно единственно, что позволяет убрать условие единственности в определении множества T. Доказательство того, что T открыто, не отличается от случая $n = 1$; в доказательстве того, что T замкнуто, используется такое утверждение: если множество $T \subset [0,1]^n$ непусто и не совпадает со всем $[0,1]^n$, то оно имеет граничную точку $x \in [0,1]^n$ такую, что всякое открытое множество $U \ni u$ пересекается как с T, так и с его дополнением. Сама x может принадлежать как T, так и дополнению.

В силу связности $[0,1]^n$ открытость, замкнутость и непустота T означают, что $T = [0,1]^n$. Восстановление подробностей доказательства — упражнение. $\square$