ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Категория. Гомотопическая категория.

Категория — алгебраическая структура, состоящая из набора *объектов* и, для любых двух объектов A и B, набора $\mathrm{Mor}(A,B)$, элементы которого называются *морфизмами* из A в B. Для любых двух морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$ в категории определена их *композиция* $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A,C)$. При этом должны быть выполнены следующие условия:

1) Композиция ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ для любых объектов A, B, C, D и морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(A,B), g \in \mathrm{Mor}(B,C), h \in \mathrm{Mor}(C,D)$.
2) Набор морфизмов $\mathrm{Mor}(A,A)$ непуст (вообще $\mathrm{Mor}(A,B)$ может быть пустым) и содержит единичный элемент $\mathbf{1}_A$ такой, что $\mathbf{1}_B \circ f = f \circ \mathbf{1}_A = f$ для произвольного морфизма $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$.

Пример 1 (категория множеств $\mathbf{Set}$). Объекты — множества, морфизмы $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ — отображения $f : A \to B$. Композиция морфизмов — композиция отображений, единичный морфизм — тождественное отображение.

Пример 2 (категория топологических пространств $\mathbf{T}$op). Объекты — топологические пространства, морфизмы $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ — непрерывные отображения $f : A \to B$. Композиция морфизмов — композиция отображений, единичный морфизм — тождественное отображение (оно непрерывно для любого топологического пространства). Вообще, категория $\mathbf{C}$ называется подкатегорией категории $\mathbf{D}$, если каждый объект $\mathbf{C}$ является одновременно и объектом $\mathbf{D}$, и любой морфизм $\mathbf{C}$ — морфизмом $\mathbf{D}$ (между теми же объектами), а операции композиции совпадают (для тех объектов и морфизмов, которые входят в категорию $\mathbf{C}$). Так, $\mathbf{T}$op — подкатегория $\mathbf{S}$et.

Пример 3 (категория групп). Объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы групп, композиция — композиция. Аналогично определяется категория колец, полей, модулей над данным кольцом, векторных пространств над данным полем и т.п. Все полученные категории являются подкатегориями $\mathbf{S}$et.

Пример 4 (полугруппа). Категория с единственным объектом A и некоторым множеством морфизмов $\mathrm{Mor}(A,A)$ (это и есть полугруппа), на котором определена композиция (операция в полугруппе), имеет место ассоциативность и существует нейтральный (единичный) элемент. Отметим еще раз, что речь идет не о *категории полугрупп* (ср. предыдущий пример), а о том, что любая индивидуальная полугруппа (в т.ч. любая группа) является категорией.

Пример 5 (категория категорий $\mathbf{C}$at). Объекты — категории, а морфизмы — *функторы*. Функтором из категории $\mathbf{C}$ в категорию $\mathbf{D}$ называется соответствие F, сопоставляющее каждому объекту A категории $\mathbf{C}$ объект $F(A)$ категории $\mathbf{D}$, а каждому морфизму f из $\mathrm{Mor}(A_1, A_2)$ в категории $\mathbf{C}$ — морфизм $F(f)$ из $\mathrm{Mor}(F(A_1), F(A_2))$ в категории $\mathbf{D}$ так, чтобы были выполнены условия: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (ковариантность) и $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$. Заметим, что $\mathbf{C}$at не является подкатегорией $\mathbf{S}$et, поскольку категория (точнее, набор ее объектов) не обязана быть множеством — например, набор объектов категории $\mathbf{S}$et множеством не является.

Пример 6 (ориентированный граф). Объекты — вершины графа, морфизм между вершинами a и b — ориентированный путь, соединяющий эти вершины (плюс, если $a = b$, единичный морфизм, формально соответствующий "пустому" пути). Композиция морфизмов — "приклеивание" путей (к концу пути $f \in \mathrm{Mor}(a,b)$ приклеивается путь $g \in \mathrm{Mor}(b,c)$ и получается путь $g \cdot f \in \mathrm{Mor}(a,c)$).

Дальше в курсе будут и другие примеры категорий.

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ между объектами категории $\mathbf{C}$ называется изоморфмзмом, если для него существует обратный, т.е. морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B,A)$ такой, что $g \circ f = \mathbf{1}_A$ и $f \circ g = \mathbf{1}_B$.

Лемма 1. *Если обратный морфизм существует, то он единствен.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(B,A)$ — обратные морфизмы к $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$. Тогда $g_1 = g_1 \circ \mathbf{1}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathbf{1}_A \circ g_2 = g_2$. □

Морфизм, обратный к f, обозначают f^{-1}.

Каждому изоморфизму $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ можно сопоставить функтор Exch_f из категории $\mathbf{C}$ в себя, для которого $\mathrm{Exch}_f(A) = B$, $\mathrm{Exch}_f(B) = A$ и $\mathrm{Exch}_f(D) = D$ для всех остальных объектов $D \neq A, B$. Действие функтора на морфизм $\varphi \in \mathrm{Mor}(P,Q)$ определяется формулой $\mathrm{Exch}_f(\varphi) = u \circ \varphi \circ v$, где

$$u = \begin{cases} f, & Q = A, \\ f^{-1}, & Q = B, \\ \mathbf{1}_Q, & Q \neq A, B \end{cases} \qquad \text{и} \qquad v = \begin{cases} f^{-1}, & P = A, \\ f, & P = B, \\ \mathbf{1}_P, & P \neq A, B. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что Exch_f — действительно функтор. Наличие такого функтора означает, что "с точки зрения категории $\mathbf{C}$" объекты A и B неотличимы: всякое утверждение, верное для A, которое можно сформулировать в терминах объектов и морфизмов $\mathbf{C}$, верно также и для B, и наоборот. Объекты, между которыми существует изоморфизм, называются изоморфными или эквивалентными.

Замечание. Изоморфизм f между изоморфными объектами A и B, вообще говоря, не единствен; разным изоморфизмам f соответствуют различные функторы обмена Exch_f — они одинаково действуют на объектах категории, но по-разному действуют на морфизмах.

Пример 7. Изоморфизм в категории множеств называется взаимно однозначным соответствием. Как нетрудно видеть (докажите!), $f : A \to B$ — взаимно однозначное соответствие, если и только если для всякого элемента $b \in B$ существует единственный элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Соответствующее отображение $f^{-1} : B \to A$ называется обратным.

Пример 8. Изоморфизм в категории топологических пространств называется гомеоморфизмом. Как нетрудно видеть, $f : A \to B$ — гомеоморфизм, если он является взаимно однозначным соответствием, непрерывен, и обратное отображение $f^{-1} : B \to A$ также непрерывно. Гомеоморфные пространства неотличимы с топологической точки зрения.

Отношение $\sim$ между элементами множества X называется отношением эквивалентности, если оно

1) Рефлексивно: $x \sim x$ для всякого элемента $x \in X$.
2) Симметрично: если $x \sim y$, то $y \sim x$.
3) Транзитивно: если $x \sim y$ и $y \sim x$, то $x \sim z$.

Лемма 2. *Множество X, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$, однозначно разбивается на непересекающиеся подмножества $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, так что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда a и b принадлежат одному и тому же множеству X_α.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого элемента $f \in X$ множество X_f всех элементов $g \in X$ таких, что $g \sim f$. Если $u, v \in X_f$, то $u \sim f$, $v \sim f$, следовательно, $f \sim v$ (симметричность) и $u \sim v$ (транзитивность). Если множества X_f и X_g не совпадают, то никакие их элементы не могут быть эквивалентны друг другу: если $u \sim v$, $u \sim f$, $v \sim g$, то для произвольного элемента $h \in X_f$ имеем $h \sim u$, $u \sim v$, $v \sim g$, откуда $h \sim g$ (транзитивность). Следовательно, $X_f \subseteq X_g$. Обратное включение доказывается так же — но тогда $X_f = X_g$ вопреки предположению. В частности, поскольку каждый элемент u эквивалентен сам себе (рефлексивность), несовпадающие множества X_f и X_g не могут иметь общих элементов.

Поскольку $f \in X_f$ (рефлексивность), объединение всех X_f есть все множество X. Выберем теперь из каждого набора совпадающих множеств X_f одно и назовем его X_α. Тогда $\bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcup_f X_f = X$, и различные X_α не пересекаются. По построению если $a, b \in X_\alpha = X_f$, то $a \sim f$, $b \sim f$ — следовательно, $a \sim b$, а если a и b принадлежат различным X_α, то они не могут быть эквивалентны по доказанному выше. □

Непрерывные отображения $f_0, f_1 : A \to B$ называются гомотопными (обозначение: $f_0 \sim f_1$), если существует непрерывное отображение $F : A \times [0,1] \to B$ (называемое гомотопией) такое, что $F(a,0) = f_0(a)$ и $F(a,1) = f_1(a)$ для всех $a \in A$. Чтобы не использовать лишние обозначения, часто пишут $f_t(a)$ вместо $F(a,t)$.

Теорема 1. *Гомотопность отображений — отношение эквивалентности, совместимое с композицией. Иными словами, $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, и если $f_0 \sim f_1$ и $g_0 \sim g_1$, где $f_0, f_1 : A \to B$ и $g_0, g_1 : B \to C$, то $(g_1 \circ f_1) \sim (g_0 \circ f_0)$.*

Доказательство. Докажем для примера транзитивность. Если $F : A \times [0,1] \to B$ — гомотопия между $F(0,\cdot) = f$ и $F(1,\cdot) = g$, а $G : A \times [0,1] \to B$ — гомотопия между $G(0,\cdot) = g = F(1,\cdot)$ и $G(1,\cdot) = h$, то гомотопия $H : A \times [0,1] \to B$ между f и h задается формулой

$$H(a,t) = \begin{cases} F(a,2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ G(a,2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что это действительно непрерывное отображение; оно называется произведением гомотопий F и G и обозначается $H = F \cdot G$.

Проверка остальных свойств — упражнение. □

Следствие 1. *1) Множество непрерывных отображений $f : A \to B$ разбивается на непересекающиеся подмножества, называемые классами гомотопии: два отображения гомотопны тогда и только тогда, когда принадлежат одному и тому же классу.*

2) Класс гомотопии, которому принадлежит композиция $g \circ f : A \to C$, зависит только от классов гомотопии, которым принадлежат f и g.

Следствие 2 (переформулировка следствия 1)**.** *Существует категория* **Hom***, объекты которой — топологические пространства, множество* $\mathrm{Mor}(A, B)$ *состоит из классов гомотопии непрерывных отображений $A \to B$, а композиция классов $\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $\psi \in \mathrm{Mor}(B, C)$ определяется как класс гомотопии, которому принадлежит отображение $g \circ f$, где отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — произвольные представители классов φ и ψ соответственно.*

Топологические пространства, эквивалентные в категории **Hom**, называются гомотопически эквивалентными. Если "расшифровать" это определение, то гомотопическая эквивалентность пространств A и B означает, что существуют непрерывные отображения $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$, $f \circ g \sim \mathrm{id}_B$.

Пример 9. Гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны. Действительно, гомеоморфность A и B означает, что существуют непрерывные отображения $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$ и $f \circ g = \mathrm{id}_B$ (взаимно обратные гомеоморфизмы), и уж подавно $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_B$. Таким образом, понятие изоморфизма объектов в категории **Hom** "более грубое", чем в категории **Top**.

Обратное неверно, как показывают дальнейшие примеры.

Топологическое пространство, гомотопически эквивалентное пространству $*$ из одной точки, называется стягиваемым. В дальнейшем мы будем обозначать χ_a отображение (непрерывное, разумеется) $* \to X$, переводящее единственную точку пространства $*$ в a; здесь X — произвольное топологическое пространство, а $a \in X$ — произвольная точка.

Пример 10. Пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо. Действительно, в качестве $f : * \to \mathbb{R}^n$ возьмем $f = \chi_0$ (отображение, переводящее единственную точку $*$ в $0 \in \mathbb{R}^n$), а отображение $g : \mathbb{R}^n \to *$ единственно. Равенство $g \circ f = \mathbf{1}_*$ очевидно, а гомотопия $f \circ g \sim \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ — упражнение (ср. пример 12).

Пример 11. Окружность S^1 не стягиваема. Действительно, как было доказано в лекции 5, отображения $\gamma^{(k)} : S^1 \to S^1$ не гомотопны друг другу, в то время как любые два отображения из точки в точку гомотопны (и даже равны).

Пример 12. Окружность $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ гомотопически эквивалентна множеству $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Отображение $f : A \to B$ — тавтологическое вложение, сопоставляющее каждой точке окружности ее саму, но уже как точку B ($A \subset B$). Отображение $g : B \to A$ — радиальная проекция: $g(x, y) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})$. Композиция $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Композиция $h_0 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g : B \to B$ задается той же формулой, что g (но рассматривается как отображение в B). Положим по определению $h_t(x, y) = t \cdot (x, y) + (1 - t) \cdot h_0(x, y)$ ($\cdot$ — умножение числа на плоский вектор). Поскольку векторы (x, y) и $h_0(x, y)$ пропорциональны с положительным коэффициентом, вектор $h_t(x, y) \neq 0$, т.е. h является гомотопией отображений $B \to B$, соединяющей отображение h_0 с отображением $h_1 = \mathrm{id}_B$.

Пример 13. Докажем, что плоскость $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфна полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Действительно, пусть $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ — гомеоморфизм. Тогда ограничение f на множество $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ — гомеоморфизм на $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$, где $a \stackrel{\text{def}}{=} f(0, 0)$.

Докажем, что дополнение $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ стягиваемо. Действительно, пусть $u \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{(0,1)} : * \to X$ (отображение, переводящее единственную точку $*$ в $(0, 1)$); отображение $v : X \to *$ единственно. Тогда $v \circ u = \mathbf{1}_*$, а $G_0 \stackrel{\text{def}}{=} u \circ v : X \to X$ — отображение, переводящее весь X в точку $(0, 1)$. Гомотопия $G_t : X \to X$, где $G_t(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (tx, ty + 1 - t)$ соединяет отображение G_0 с $G_1 = \mathbf{1}_X$. Тем самым пара отображений u, v — гомотопическая эквивалентность. В то же время $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (гомеоморфизм — параллельный перенос), которое, как было доказано в примере 12, гомотопически эквивалентно окружности и, следовательно, не стягиваемо (пример 11). Таким образом, пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ и $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ гомотопически не эквивалентны и тем более не гомеоморфны. Следовательно, плоскость $\mathbb{R}^2$ и полуплоскость с границей $\mathbb{R}^2_+$ не гомеоморфны.