ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Фундаментальный группоид и фундаментальная группа.

Пример 1. Пусть $*$ — топологическое пространство, состоящее из одной точки. Две точки $a, b \in X$ можно соединить непрерывной кривой тогда и только тогда, когда отображения χ_a и χ_b гомотопны (кривая это и есть гомотопия). Тем самым классы гомотопии отображений $* \to X$ — то есть морфизмы $u \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Hom}}(*, X)$ в категории **Hom** — это компоненты линейной связности пространства X.

Пусть теперь X — топологическое пространство, $a, b \in X$, а $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ — непрерывные отображения (кривые), для которых $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ и $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$. Гомотопией кривых с фиксированными концами называется непрерывное отображение $G : [0,1]^2 \to X$ такое, что $G(t,0) = \gamma_0(t)$, $G(t,1) = \gamma_1(t)$ и $G(0,s) = a$, $G(1,s) = b$ при всех $t, s \in [0,1]$.

Теорема 1. *1) Гомотопия с фиксированными концами — отношение эквивалентности, совместимое с произведением гомотопий.*

2) Существует категория $\Pi_1(X)$, объекты которой — точки X, а морфизм $u \in \mathrm{Mor}(a,b)$ это класс гомотопии с фиксированными концами кривых, соединяющих $a \to B$. Композиция классов $\varphi \in \mathrm{Mor}(a,b)$ и $\psi \in \mathrm{Mor}(a,b)$ определяется как класс, которому принадлежит $f \cdot g$ (произведение гомотопий f и g), где кривые $f, g : [0,1] \to X$ — произвольные представители классов φ и ψ соответственно.

3) Любой морфизм в категории $\Pi_1(X)$ обратим.

Категория, в которой каждый морфизм обратим (т.е. является изоморфизмом), называется группоидом; $\Pi_1(X)$ называется фундаментальным группоидом пространства X.

Доказательство.

Утверждение 1: Доказательство утверждения про эквивалентность аналогично доказательству теоремы 1 лекции 6. Доказательство утверждения про произведение: пусть f_s, g_s ($s \in [0,1]$) — гомотопии с фиксированными концами a, b и b, c соответственно, соединяющие кривые f_0 с f_1 и g_0 с g_1. Поскольку $f_s(1) = b = g_s(0)$ то определено произведение $h_s \stackrel{\text{def}}{=} f_s \cdot g_s$. Очевидно, h_s — гомотопия, соединяющая кривую $f_0 \cdot g_0$ с $f_1 \cdot g_1$.

Утверждения 2 и 3: Из утверждения 1 вытекает, что композиция морфизмов определена корректно, то есть не зависит от выбора конкретных представителей f, g классов φ, ψ (проверьте!). Осталось доказать, что а) композиция морфизмов ассоциативна, б) для каждой точки существует единичный морфизм и в) для каждого морфизма существует обратный. Доказательства всех этих утверждений однотипны и сводятся к построению соответствующих гомотопий; докажем, например, а).

Пусть f, g, h — кривые из классов гомотопии φ, ψ, ξ, последовательно соединяющие точки a, b, c. Тогда классы $\varphi \cdot (\psi \cdot \xi)$ и $(\varphi \cdot \psi) \cdot \xi$ содержат кривые u_0 и u_1, где

$$u_0(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ g(4t-2), & 1/2 \le t \le 3/4, \\ h(4t-3), & 3/4 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad u_1(t) = \begin{cases} f(4t), & 0 \le t \le 1/4, \\ g(4t-1), & 1/4 \le t \le 1/2, \\ h(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Гомотопия u_s, соединяющая эти кривые, выглядит так:

$$u_s(t) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{2-s}\right), & 0 \le t \le \frac{2-s}{4}, \\ g(4t-(2-s)), & \frac{2-s}{4} \le t \le \frac{3-s}{4}, \\ h\left(\frac{4t+s-3}{s+1}\right), & \frac{3-s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Для доказательства непрерывности достаточно проверить, что u_s не терпит разрывов на границе участков, т.е. при $t = (2-s)/4$ и $t = (3-s)/4$ — упражнение.

Единичным морфизмом $\mathbf{1}_a \in \mathrm{Mor}(a,a)$ является класс гомотопии кривой, стоящей не месте: $e_a(t) = a$ для всех $0 \le t \le 1$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Mor}(a,b)$, и $f : [0,1] \to X$ — кривая, представитель класса φ. Тогда $\varphi^{-1} \in \mathrm{Mor}(b,a)$ — класс, содержащий кривую $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(1-t)$.

Построение гомотопий, необходимых для проверки равенств $\mathbf{1}_a \cdot \varphi = \varphi = \varphi \cdot \mathbf{1}_b$ и $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \mathbf{1}_a$, $\varphi^{-1} \cdot \varphi = \mathbf{1}_b$ — упражнение. $\square$

Следствие 1. *Точки пространства X эквивалентны как объекты фундаментального группоида тогда и только тогда, когда между ними существует хотя бы один морфизм, т.е. когда они принадлежат одной компоненте линейной связности.*

Пример 2. Объекты группоида $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — точки $a \in \mathbb{R}^n$. Если $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — две кривые с общим началом и концом $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$, то они гомотопны с фиксированными концами: $\gamma_s(t) = a\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$ — искомая гомотопия (проверьте!). Поскольку $\mathbb{R}^n$ линейно связно, множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(\mathbb{R}^n)}(a,b)$ для любых точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ состоит из одного элемента.

Для любого объекта a произвольной категории C множество морфизмов $\mathrm{Mor}_C(a,a)$ образует полугруппу (ср. с примером 4 лекции 6). Если категория C — группоид, то эта полугруппа является группой, которую мы будем обозначать $c(a)$. Соответствующая группа, определенная по точке $a \in X$ как объекту фундаментального группоида $\Pi_1(X)$, называется фундаментальной группой пространства X в точке a и обозначается $\pi_1(X,a)$.

Пусть a, b — объекты группоида C, а $f \in \mathrm{Mor}(a,b)$ — морфизм между ними. Тогда определен функтор Exch_f; его ограничение на $c(a)$ — отображение $\mathrm{Exch}_f|_{c(a)} : c(a) \to c(b)$. Поскольку Exch_f — функтор, это отображение является гомоморфизмом групп; обратным к нему является гомоморфизм $\mathrm{Exch}_f|_{c(b)} : c(b) \to c(a)$. Кроме того, если $g \in \mathrm{Mor}(b,d)$, то имеет место равенство $\mathrm{Exch}_{f\cdot g} = \mathrm{Exch}_g \circ \mathrm{Exch}_f$. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Операция, ставящая в соответствие каждому объекту a группоида C группу $c(a)$, а каждому морфизму $f \in \mathrm{Mor}(a,b)$ — изоморфизм групп $\mathrm{Exch}_f|_{c(a)} : c(a) \to c(b)$, является функтором из C в категорию групп.*

Заметим также, что если $a = b$, то изоморфизм $c(a) \to c(a)$, заданный функтором Exch_f, является сопряжением посредством элемента $f \in \mathrm{Mor}(a,a) = c(a)$: $\mathrm{Exch}_f(g) = f^{-1} \circ g \circ f$ (внутренний автоморфизм группы $c(a)$). Отсюда вытекает, что если $f, g \in \mathrm{Mor}(a,b)$ — два различных морфизма, то изоморфизмы $c(a) \to c(b)$, заданные функторами Exch_f и Exch_g, не совпадают, а отличаются на внутренний автоморфизм группы $c(a)$ (или $c(b)$): $(\mathrm{Exch}_g)^{-1} \circ \mathrm{Exch}_f|_{c(a)} = \mathrm{Exch}_{fg^{-1}}|_{c(a)}$ — сопряжение посредством элемента $fg^{-1} \in c(a)$.

Следствие 2 (леммы 1 и следствия 1)**.** *Если точки a и b принадлежат одной компоненте линейной связности пространства X, то фундаментальные группы $\pi_1(X,a)$ и $\pi_1(X,b)$ изоморфны.*

В явном виде изоморфизм между группами $\pi_1(X,a)$ и $\pi_1(X,b)$ задается так: если $f : [0,1] \to X$ — кривая, соединяющая точки a и b, а $\gamma : [0,1] \to X$ — кривая, представляющая класс $g \in \pi_1(X.a)$, то класс $\mathrm{Exch}_f(g)$ содержит кривую $f^{-1} \cdot \gamma \cdot f$.

Пример 3. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Действительно, элементами $\pi_1(S^1, b)$ являются классы гомотопии непрерывных отображений $\gamma : [0,1] \to S^1$ таких, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Согласно следствию 2, можно без ограничения общности считать, что $b = (1,0)$ (где $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Как доказано в лекции 5, каждому непрерывному отображению $f : [0,1] \to S^1$ такому, что $f(0) = f(1) (= b)$ можно сопоставить целое число — индекс $\mathrm{ind}\, f$, причем степени гомотопных отображений одинаковы. Тем самым определено отображение $\mathrm{ind} : \pi_1(S^1, b) \to \mathbb{Z}$; докажем, что оно является изоморфизмом групп.

1. ind — ***гомоморфизм*** Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \pi_1(S^1, b)$, а $f_1, f_2 : [0,1] \to S^1$ — непрерывные кривые из классов гомотопии φ_1, φ_2. Тогда кривая

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ f_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

принадлежит классу $\varphi_1 \cdot \varphi_2$

Обозначим $F_1, F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ поднятия кривых f_1, f_2, для которых $F_1(0) = F_2(0) = 0$ (согласно лемме о поднятии, F_1, F_2 существуют и единственны); тогда по определению индекса $F_1(1) = \mathrm{ind}\, f_1$, $F_2(1) = \mathrm{ind}\, f_2$. Как нетрудно видеть, отображение

$$F(t) = \begin{cases} F_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ F_1(1) + F_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

является поднятием кривой f, причем $F(0) = 0$. Следовательно, $\mathrm{ind}\, f = F(1) = F_1(1) + F_2(1) = \mathrm{ind}\, f_1 + \mathrm{ind}\, f_2$.

2. ind — ***мономорфизм*** Достаточно доказать, что если $f : [0,1] \to S^1$ — замкнутая кривая индекса 0, для которой $f(0) = f(1) = b$, то она гомотопна (с фиксированными концами) кривой, переводящей весь отрезок в точку. Необходимая гомотопия уже была построена при доказательстве последнего утверждения (о единственности) следствия 2 в лекции 5 — проверьте, что при этой гомотопии концы действительно фиксированы.

3. ind — *эпиморфизм* Для произвольного целого k имеем $\operatorname{ind}\gamma^{(k)} = k$, где $\gamma^{(k)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$.

Из замечания после леммы 1 следует, что множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(a,b)$ для любых двух точек $a,b \in S^1$ состоит из счетного числа элементов: любой элемент получается из одного выделенного умножением на всевозможные элементы $\pi_1(S^1,a) = \mathbb{Z}$ слева (или $\pi_1(S^1,b) = \mathbb{Z}$ справа). При это гомоморфизм $\mathrm{Exch}_f|_{\pi_1(S^1,a)} : \pi_1(S^1,a) \to \pi_1(S^1,b)$ от кривой $f \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(a,b)$ не зависит: два таких гомоморфизма отличаются на внутренний автоморфизм (сопряжение) фундаментальной группы, а фундаментальная группа $\mathbb{Z}$ коммутативна и нетривиальных внутренних автоморфизмов не имеет.