ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Фундаментальный группоид как функтор. Фундаментальные группы линейно связных гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

В предыдущей лекции мы определили для каждого топологического пространства X категорию $\Pi_1(X)$, называемую фундаментальным группоидом пространства X. Пусть теперь $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, а $u \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a, b)$, то есть класс гомотопии (с фиксированными концами) кривых, соединяющих точки a и b пространства X. Пусть $\gamma : [0, 1] \to X$ — кривая класса u. Сопоставим классу u класс $\Pi_1(f)(u) \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b))$, содержащий кривую $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$.

Теорема 1. *Таким образом Π_1 превращается в функтор из категории* **Top** *топологических пространств в категорию группоидов (объекты которой — группоиды, а морфизмы — функторы).*

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно проверить, что конструкция морфизма (класса гомотопии кривых) $\Pi_1(f)(u)$ не зависит от выбора кривой γ класса u — при замене ее на гомотопную кривую кривая $f \circ \gamma$ также заменяется на гомотопную. Также нужно доказать, что $\Pi_1(g \circ f) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)$, где $g : Y \to Z$ — произвольное непрерывное отображение топологических пространств.

Обе эти проверки — (легкое) упражнение. □

Функтор $\Pi_1(f)$ порождает гомоморфизм фундаментальных групп, который обычно обозначается $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$. Если $g : Y \to Z$ — непрерывное отображение, то из теоремы 1 вытекает, что $(g \circ f)_* - g_* \circ f_*$, где $g_* : \pi_1(Y, f(a)) \to \pi_1(Z, g(f(a)))$.

Изучим поведение функтора $\Pi_1(f)$ при гомотопии отображения f. Отметим, что конструкцию функтора Π_1 нельзя дополнить до функтора из *гомотопической* категории **Hom** в категорию группоидов. Тем не менее, при гомотопии отображения $f : X \to Y$ функтор $\Pi_1(f)$ из категории $\Pi_1(X)$ в категорию $\Pi_1(Y)$ ведет себя “достаточно хорошо”.

Пусть $h_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$,— гомотопия непрерывных отображений. Тогда для каждой точки $a \in X$ (т.е. для каждого объекта категории $\Pi_1(X)$) определена кривая $\gamma_a : [0, 1] \to Y$, заданная формулой $\gamma_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} h_t(a)$. Класс гомотопии кривой γ_a с фиксированными концами — морфизм $u_a \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(h_0(a), h_1(a))$ категории $\Pi_1(Y)$.

Теорема 2. *Для любого объекта $a \in X$ категории $\Pi_1(X)$ имеет место равенство $\Pi_1(h_1)(a) = \mathrm{Exch}_{u_a}(\Pi_1(u_0(a)))$. Для любого морфизма $v \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a, b)$ имеет место равенство $\Pi_1(h_1)(v) = u_a^{-1} \cdot \Pi_1(h_0)(v) \cdot u_b$.*

Следствие 1. *Для произвольной точки $a \in X$ имеет место равенство $(h_1)_* = \mathrm{Exch}_{u_a} \circ (h_0)_*$, где, напомним, $(h_0)_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, h_0(a))$ и $(h_1)_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, h_1(a))$ — гомоморфизмы фундаментальных групп, порожданные ограничением функторов $\Pi_1(h_0)$ и $\Pi_1(h_1)$ на множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a, a) \stackrel{def}{=} \pi_1(X, a)$.*

В явном виде следствие 1 означает, что $h_1(v) = u_a \cdot v \cdot u_a^{-1}$ для любого элемента $v \in \pi_1(X, a)$. Если $h_1(a) = h_0(a) \stackrel{\text{def}}{=} b$, то кривая γ_a является петлей с началом и концом в точке b, и тем самым $u_a \in \Pi_1(Y, b)$. Следовательно, гомоморфизмы групп $(h_0)_*$ и $(h_1)_*$ отличаются на внутренний автоморфизм группы $\pi_1(Y, b)$ — сопряжение посредством элемента u_a.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mu : [0, 1] \to X$ — непрерывная кривая, причем $\mu(0) = a$ и $\mu(1) = b$. Теорема утверждает, что кривая $h_1 \circ \mu$ гомотопна кривой $\gamma_a^{-1} \cdot (h_0 \circ \mu) \cdot \gamma_b$. Для всякого $s \in [0, 1]$ определим кривую $\gamma_a^{(s)}$ равенством $\gamma_a^{(s)}(t) = h_{(1-s)t}(a)$; аналогично $\gamma_b^{(s)}$. Рассмотрим гомотопию кривых $\Gamma_s = (\gamma_a^{(s)})^{-1} \cdot (h_{1-s} \circ \mu) \cdot \gamma_b^{(s)}$ — она определена, поскольку $\gamma_a^{(s)}(1) = h_{1-s}(a) = (h_{1-s} \circ \mu)(0)$ и $(h_{1-s} \circ \mu)(1) = h_{1-s}(b) = \gamma_b^{(s)}(0)$. Кривая $\Gamma_1 = \gamma_a^{-1} \cdot (h_0 \circ \mu) \cdot \gamma_b$, а кривая Γ_0 принадлежит классу гомотопии $\mathbf{1}_a \cdot [h_1 \circ \mu] \cdot \mathbf{1}_b = [h_1 \circ \mu]$ ([] — класс гомотопии кривой с фиксированными концами), то есть гомотопна $h_1 \circ \mu$. □

Следствие 2 (следствия 1). *Если отображение $h : X \to X$ гомотопно тождественному, то автоморфизм $h_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, h(a))$ — изоморфизм; если $h(a) = a$, то $h_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,b)}$.*

Доказательство. Обозначим h_t гомотопию, соединяющую отображения $h_0 = \mathrm{id}_X$ и $h_1 = h$. Пусть $v \in \pi_1(X, a)$ — класс гомотопии какой-то петли $\mu : [0, 1] \to X$, $\mu(0) = \mu(1) = a$. Тогда согласно следствию 1 $h_*(v)$ — класс гомотопии петли $\gamma_a^{-1} \cdot \mu \cdot \gamma_a$, то есть равен $\mathrm{Exch}_u(v)$, где $u \in \mathrm{Mor}(a, h(a))$ — класс гомотопии пути $\gamma_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} h_t(0)$. Но функтор обмена Exch_u обратим (является изоморфизмом). □

Следствие 3 (следствия 2). *Пусть линейно связные топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны, причем отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ гомотопически обратны. Тогда $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ — изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $g_* : \pi_1(Y, f(a)) \to \pi_1(X, g(f(a)))$. Согласно следствию 2, отображение $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, g(f(a)))$ — изоморфизм. Если элемент $v \in \pi_1(X, a)$ принадлежит ядру отображения f_* (т.е. $f_*(v) = 1_{\pi_1(Y)}$), то $g_*(f_*(v)) = g_*(\mathbf{1}_{\pi_1(Y)}) = \mathbf{1}_{\pi_1(X)}$, откуда вытекает $v = \mathbf{1}_{\pi_1(X)}$ ($g_* \circ f_*$ — изоморфизм групп, т.е. его ядро тривиально). Следовательно, для всякой точки $a \in X$ гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ имеет тривиальное ядро.

С другой стороны, пусть $b \in Y$; рассмотрим гомоморфизмы $g_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, g(b))$ и $f_* : \pi_1(X, g(b)) \to \pi_1(Y, f(g(b)))$. Согласно следствию 2, отображение $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(Y, f(g(b)))$ — изоморфизм. Отсюда вытекает, что для произвольного элемента $u \in \pi_1(Y, f(g(b)))$ существует $w \in \pi_1(Y, b)$ такой, что $f_*(g_*(w)) = u$. Следовательно, образом гомоморфизма $f_* : \pi_1(X, g(b)) \to \pi_1(Y, f(g(b)))$ является вся группа $\pi_1(Y, f(g(b)))$. Поскольку Y линейно связно, аналогичное свойство верно для произвольного гомоморфизма $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ — его образом является вся группа.

Тем самым доказано, что f_* — изоморфизм групп. $\square$

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (плоскость без точки) гомотопически эквивалентна окружности. Следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) = \mathbb{Z}$ (точку указывать не нужно, т.к. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ линейно связно).