ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии. Существование универсального накрытия.

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии

Теорема о накрывающей гомотопии уже доказывалась ранее для накрытия $p : \mathbb{R} \to S^1$. Доказательство в общем случае похожее; приведем его для полноты.

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии.

Единственность: Пусть $H_1, H_2 : [0,1]^n \to E$ — два поднятия, $H_1(0) = H_2(0) = x$ (для удобства обозначим $0 \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, 0)$) и $R \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in [0,1]^n \mid H_1(s) = H_2(s)\}$. Множество R непусто ($0 \in R$); докажем, что оно открыто и замкнуто.

Множество R замкнуто, поскольку является прообразом замкнутого (почему?) множества $\{(y,y) \mid y \in E\} \subset E \times E$ при непрерывном отображении $t \mapsto (H_1(t), H_2(t))$. Заметим теперь, что если $R \neq [0,1]^n$, то оно имеет граничную точку u, т.е. такую точку, что если $V \ni u$ — открытое множество, то пересечения $V \cap R$ и $V \cap ([0,1]^n \setminus R)$ оба непусты. Поскольку R замкнуто, $u \in R$, то есть $H_1(u) = H_2(u)$.

Пусть теперь $U \subset B$ — окрестность точки $b \stackrel{\text{def}}{=} H_1(u) = H_2(u)$, упомянутая в определении накрытия, и пусть $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ — тривиализация. В силу непрерывности h существует окрестность $V \subset [0,1]^n$ точки u такая, что $h(V) \subset U$, откуда $H_1(V), H_2(V) \subset p^{-1}(U)$.

Имеем $\lambda(H_1(u)) = \lambda(H_2(u)) \stackrel{\text{def}}{=} k$. Без ограничения общности можно считать множество V связным; следовательно, отображения $\lambda \circ H_1 : V \to F$ и $\lambda \circ H_2 : V \to F$ постоянны — иными словами, $\lambda(H_1(v)) = k = \lambda(H_2(v))$ для всех $v \in V$. С другой стороны, $p(H_1(v)) = h(v) = p(H_2(v))$, откуда вытекает, что $\Lambda(H_1(v)) = (p(H_1(v)), \lambda(H_1(v))) = (k, h(v)) = (p(H_2(v)), \lambda(H_2(v))) = \Lambda(H_2(v))$. Поскольку Λ — гомеоморфизм, оно взаимно однозначно, откуда получаем, что $H_1(v) = H_2(v)$ для всех $v \in V$. Но это противоречит тому, что открытое множество V содержит граничную точку u и, следовательно, пересекается с $[0,1]^n \setminus R$.

Полученное противоречие доказывает, что граничных точек нет, $R = [0,1]^n$, то есть единственность доказана.

Существование: Доказательство индукцией по n.

База $n = 1$ Определим множество $T \subset [0,1]$ точек t таких, что существует поднятие $H^{(t)} : [0,t] \to E$ (с условием $H^{(t)}(0) = x$). Единственность поднятия уже доказана, так что если $t \in T$ и $0 \le s \le t$, то $s \in T$, и $H^{(s)}$ совпадает с ограничением $H^{(t)}\big|_{[0,s]}$. Поэтому мы будем обозначать все поднятия $H^{(t)}$ общим символом H.

Докажем, что множество T открыто. Действительно, пусть $t \in T$. Пусть $U \subset B$ — окрестность точки $b = h(t)$, упомянутая в определении накрытия, а $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ — соответствующая тривиализация. Пусть $\lambda(H(t)) \stackrel{\text{def}}{=} k$. В силу непрерывности h существует $\varepsilon > 0$ такое, что $h((t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subset U$ и, следовательно, $H((t-\varepsilon, t]) \subset p^{-1}(U)$. Полуинтервал $(t-\varepsilon, t]$ связен, пространство F дискретно, отображение $\lambda \circ H$ непрерывно — следовательно, $\lambda(H(s)) = k$ для всякого $s \in (t-\varepsilon, t]$). Согласно определению накрытия, множество $\lambda^{-1}(k) \subset p^{-1}(U)$ открыто, а отображение $\tilde{p} \stackrel{\text{def}}{=} |_{\lambda^{-1}(k)} : \lambda^{-1}(k) \to U$ — гомеоморфизм. Тогда отображение $\tilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{p}^{-1} \circ h$ является поднятием, определено на интервале $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ и совпадает с H на полуинтервале $(t = \varepsilon, t]$. Тем самым поднятие возможно на множестве $[0, t+\varepsilon)$, откуда следует, что $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset T$, и открытость T доказана.

Пусть теперь $t_* = \sup T$. Как уже доказано, множество T выпукло: если $t \in T$ и $0 \le s \le t$, то $s \in T$. Поэтому замкнутость T эквивалентна утверждению, что $t_* \in T$ (докажите!); докажем его. Пусть, как и в доказательстве открытости, U — окрестность точки $b = h(t_*)$ из определения накрытия, и $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ — соответствующая тривиализация. Из выпуклости T следует, что $[0, t_*) \subset T$, а из непрерывности h вытекает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $h((t_* - \varepsilon, t_*)) \subset U$. Следовательно, отображение $\lambda \circ H : (t_* - \varepsilon, t_*) \to F$ определено и непрерывно и, следовательно ($(t_* - \varepsilon, t_*)$ связно, F дискретно), постоянно: $\lambda(H(s)) = const. \stackrel{\text{def}}{=} k$ для всех $s \in (t_* - \varepsilon, t_*)$. Пусть теперь $\tilde{p} \stackrel{\text{def}}{=} p|_{\lambda^{-1}(k)} : \lambda^{-1}(k) \to U$; по определению накрытия это гомеоморфизм. Но тогда $\lim_{t \to t_*} H(s) = \tilde{p}^{-1}(\lim_{t \to t_*} h(t) = \tilde{p}^{-1}(b)$ — однозначно определенный элемент слоя

$p^{-1}(b) \subset p^{-1}(U) \subset E$ над точкой $b \in B$. Таким образом, H продолжается до поднятия, определенного на отрезке $[0, t_*]$, так что $t_* \in T$ и T замкнуто.

Поскольку T открыто, замкнуто и непусто, $T = [0, 1]$ в силу связности, и база индукции $n = 1$ доказана.

Шаг индукции $n-1 \mapsto n$. По предположению индукции, существует (и единственно) поднятие $H_0 : [0, 1]^{n-1} \times \{0\} \to E$. Пусть $\tau = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$; рассмотрим кривую $h_\tau : [0, 1] \to B$, заданную формулой $h_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} h(t_1, \dots, t_{n-1}, t)$. Согласно базе индукции, существует (и единственно) поднятие $H_\tau : [0, 1] \to E$ такое, что $p \circ H_\tau = h_\tau$ и $H_\tau(0) = H_0(t_1, \dots, t_{n-1})$. Положим по определению $H(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} H_\tau(t_n)$. Очевидно, что H — поднятие ($p \circ H = h$) и что $H(0, \dots, 0) = x$; так что единственное, что нужно доказать, это непрерывность H. Заметим сразу, что непрерывность по переменной t_n вытекает, по построению, из базы индукции.

Для произвольной точки $t \stackrel{\text{def}}{=} (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$ пусть $U_t \subset B$ — окрестность точки $h(t) \in B$ из определения накрытия, и $\lambda_t : p^{-1}(U_t) \to F$ — соответствующая тривиализация. В силу непрерывности h существует набор положительных чисел $\varepsilon = (\varepsilon_1^{(t)}, \dots, \varepsilon_n^{(t)})$ таких, что $h(K_{t,\varepsilon}) \subset U$, где $K_{t,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (t_1 - \varepsilon_1^{(t)}, t_1 + \varepsilon_1^{(t)}) \times \dots \times (t_n - \varepsilon_n^{(t)}, t_n + \varepsilon_n^{(t)})$ (параллелепипед). Таким образом, для каждого t определено отображение $\kappa_t \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_t \circ H : K_{t,\varepsilon} \to F$. Назовем параллелепипед $K_{t,\varepsilon}$ хорошим, если это отображение постоянно (образ — единственная точка $k_t \in F$).

Лемма 1. *Множество хороших параллелепипедов обладает следующими свойствами:*

1) *Если $K_{t,\varepsilon}$ хороший, то поднятие H непрерывно в точке $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$.*
2) *Если параллелепипед $K_{t.\varepsilon}$ хороший и пересечение $K_{s,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} K_{t,\varepsilon} \cap K_{t',\varepsilon'} \neq \varnothing$, то отображение $\lambda_{t'}$ постоянно (принимает только одно значение) на $K_{s,\delta}$.*
3) *Если параллелепипед $K_{t,\varepsilon}$ содержит точку $(t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$, то он является хорошим.*

Доказательство. 1. Пусть $\lambda(H(s)) = const. = k$ для всех $s \in K_{t,\varepsilon}$. Как и раньше, $\tilde{p} \stackrel{\text{def}}{=} |_{\lambda^{-1}(k)} : \lambda^{-1}(k) \to U$ — гомеоморфизм, откуда следует, что $H = \tilde{p}^{-1} \circ h$ — непрерывное отображение.

2. Из пункта 1 следует, что поднятие H непрерывно на параллелепипеде $K_{t,\varepsilon}$ — а, значит, и на меньшем параллелепипеде $K_{s,\delta} \subset K_{t,\varepsilon}$. Тогда отображение $\lambda_{t'} \circ H|_{K_{s,\delta}} : K_{s,\delta} \to F$ непрерывно и, следовательно, постоянно ($K_{s,\delta}$ связен, F дискретно).

3. Ограничение поднятия H на $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$ непрерывно по построению. Из этого следует — так же, как в доказательстве пункта 1 — что $\lambda \circ H$ постоянно на множестве $K_{t,\varepsilon} \cap [0, 1]^{n-1} \times \{0\}$ (это грань параллелепипеда $K_{t,\varepsilon}$). При фиксированном $\tau = (s_1, \dots, s_{n-1})$ отображение $H(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n) = H_\tau(s_n)$ непрерывно по построению — следовательно, $\lambda_t(H_\tau(s_n)) \in F$ не зависит от s_n. Тем самым $\lambda_t(H(s)) = const.$ при $s \in K_{t,\varepsilon}$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы зафиксируем $\tau = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ и рассмотрим отрезок $I_\tau = \{(t_1, \dots, t_{n-1}, s) \mid\} \subset [0, 1]^n$. Открытые параллелепипеды $K_{t,\varepsilon}$ при всевозможных $t \in I_\tau$ покрывают I_τ — следовательно, в силу компактности, существует конечный набор чисел $s_1, \dots, s_N$ и векторов $\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(1)}), \dots, \varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1^{(N)}, \dots, \varepsilon_n^{(N)})$ таких, что параллелепипеды $Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} K_{(\tau,s_1),\varepsilon^{(1)}}, \dots, Q_N \stackrel{\text{def}}{=} K_{(\tau,s_N),\varepsilon^{(N)}}$ покрывают I_τ. Уменьшая при необходимости числа $\varepsilon_j^{(i)}$ при $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, n-1$ (но не $j = n$!), можно сделать все эти числа одинаковыми — при этом все равно отрезок будет покрыт параллелепипедами $Q_1, \dots, Q_N$ с одинаковым "поперечным сечением". Уменьшая при необходимости $\varepsilon_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, можно добиться, чтобы при этом Q_i пересекался только с Q_{i-1} и Q_{i+1} (докажите!).

Параллелепипед Q_1 — хороший по пункту 3 леммы 1. Согласно пункту 2 леммы отображение $\lambda_2 \circ H$ постоянно на $Q_1 \cap Q_2$. Но, как отмечалось в доказательстве леммы, точка $\lambda_2(H(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)) \in F$ не зависит от s_n — следовательно, $\lambda_2 \circ H$ постоянно на Q_2, и Q_2 — хороший параллелепипед. Продолжая по индукции, получим, что все параллелепипеды Q_i хорошие; из пункта 1 леммы вытекает теперь, что поднятие H непрерывно на всем отрезке I_τ. Поскольку τ произвольно, поднятие H непрерывно на всем кубе $[0, 1]^n$. $\square$

Категория накрытий

Топологическое пространство X называется односвязным, если оно линейно связно и $\pi_1(X)$ тривиальна (состоит из одного элемента). Пространство называется локально односвязным, если для любой точки $a \in X$ и произвольного открытого множества $U \ni a$ существует односвязное открытое множество V, для которого $a \in V \subset U$.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ односвязно и локально односвязно. Пространство $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (с топологией подмножества) не является локально односвязным: открытые подмножества $U \subset \mathbb{Q}$ не могут быть линейно связными (см. задачу 2а листка 3). $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ не является локально односвязным (докажите!), хотя локально линейно связно (определение аналогично определению локальной односвязности; сформулируйте его самостоятельно).

Лемма 2. *Пространство X односвязно тогда и только тогда, когда в его гомотопическом группоиде $\Pi_1(X)$ для любых точек $a, b \in X$ имеется единственный морфизм из a в b (иными словами, пространство линейно связно и любые две непрерывные кривые $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ с одинаковыми концами a, b гомотопны с фиксированными концами).*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ для любых $a, b \in X$ состоит из одного элемента. Тогда любые две точки a, b можно соединить кривой (иначе $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) = \varnothing$), так что X линейно связно. Полагая $b = a$, получим, что $\pi_1(X,a) = \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,a)$ состоит из одного элемента — следовательно, X односвязно.

Обратно, пусть X односвязно. В силу линейной связности $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) \neq \varnothing$ для любых $a, b \in X$. Пусть $u_1, u_2 \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$. Тогда $u_1 \cdot u_2^{-1} \in \pi_1(X,a)$, откуда $u_1 \cdot u_2^{-1} = \mathbf{1}_a$ — следовательно, $u_2 = \mathbf{1}_a u_2 = u_1 u_2^{-1} u_2 = u_1 \mathbf{1}_b = u_1$, и $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ состоит из одного элемента. □

Лемма 3. *Пусть B и E — линейно связные локально односвязные пространства, а $p : E \to B$ — непрерывное отображение; пусть $b \in B$. Предположим, что прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ дискретен и отображение p обладает свойством поднятия путей: для произвольного пути $\gamma : [0,1] \to B$ такого, что $\gamma(0) = b$, и произвольного $x \in E$ такого, что $p(x) = b$, существует и единствен путь $\Gamma : [0,1] \to E$ такой, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$. Тогда p является накрытием.*

Доказательство. Обозначим $F \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(b)$ и рассмотрим произвольную точку $a \in B$. Поскольку B линейно связно, существует путь γ, соединяющий a с b. Возьмем в качестве $U \ni a$ произвольную односвязную окрестность. Согласно лемме 2, для любой точки $c \in U$ существует ровно один, с точностью до гомотопии с фиксированными концами, путь $\delta_c : [0,1] \to U$ такой, что $\delta_c(0) = c$, $\delta_c(1) = a$; тогда путь $\delta_c \cdot \gamma$ соединяет c и b.

Согласно свойству поднятия путей для всякой точки $x \in p^{-1}(c)$ существует и единствен путь $\Phi : [0,1] \to E$ такой, что $p \circ \Phi = \delta_c \cdot \gamma$ и $\Phi(0) = x$. Положим по определению $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(1) \in p^{-1}(b) = F$; тем самым определено отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$. Пространство E локально односвязно, поэтому для всякой точки $x \in p^{-1}(V)$ существует односвязное открытое множество W такое, что $x \in W \subset p^{-1}(V)$. Очевидно, отображение λ постоянно на W и, следовательно, непрерывно в точке x. Поскольку x произвольна, отображение λ непрерывно.

Докажем, что $\Lambda = p \times \lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм. Пусть $c \in U$; рассмотрим путь δ_c, определенный выше. Тогда для всякого $\varphi \in p^{-1}(b) = F$ существует единственное поднятие $\Gamma : [0,1] \to E$ пути $\gamma^{-1} \cdot \delta_c^{-1}$ (из b в c), для которого $\Gamma(0) = \varphi$. Тогда точка $\Gamma(1) \in p^{-1}(c)$ определена однозначно и, очевидно, $\Lambda(\Gamma(1)) = (c, \varphi)$. Следовательно, Λ обратимо. Непрерывность Λ вытекает из доказанной выше непрерывности λ; непрерывность Λ^{-1} вытекает из непрерывности p и того факта, что λ отображает $p^{-1}(U)$ в дискретное пространство F (уточните!). □

Пусть B — линейно связное локально односвязное пространство. Отметим точку $b \in B$ и рассмотрим категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, объекты которой — тройки (E, p, x), где E — линейно связное пространство, $p : E \to B$ — накрытие, а $x \in E$ — точка, для которой $p(x) = b$. Морфизмом в категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ из объекта (E_1, p_1, x_1) в объект (E_2, p_2, x_2) называется непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ такое, что $p_2 \circ f = p_1$ и $f(x_1) = x_2$; композиция морфизмов — композиция отображений. Тождественное отображение id_E — единичный морфизм; ассоциативность очевидна.

Объект a категории C называется инициальным, если если для каждого объекта b имеется ровно один морфизм $f_b : a \to b$. Инициальный объект, если существует, может не быть единственным, но очевидно, что любые два инициальных объекта изоморфны.

Пример 2. В категории множеств есть единственный инициальный объект — пустое множество (морфизмы категории множеств — отображения, плюс один “специальный” морфизм $f_A : \varnothing \to A$ для произвольного множества A).

В категории групп инициальный объект — группа из одного элемента; в категории векторных пространств — нульмерное векторное пространства, состоящее из единственного элемента (нуля). В гомотопическом группоиде $\Pi_1(X)$ односвязного пространства X любой объект — инициальный (и они все изоморфны), а если X не односвязно, то инициального объекта не существует (докажите!).

Пример 3. Пусть G — произвольная группа. Рассмотрим категорию $\mathbf{Subgr}_{\mathrm{G}}$, объекты которой — подгруппы $H \subset G$, а морфизмы — тавтологические вложения подгрупп: если $H_1 \subseteq H_2$ — подгруппы G, то между H_1 и H_2 существует единственный морфизм, а если $H_1 \not\subseteq H_2$, то $\mathrm{Mor}(H_1, H_2) = \varnothing$. В категории $\mathbf{Subgr}_{\mathrm{G}}$ имеется единственный инициальный объект — подгруппа, состоящая только из единичного элемента.

Теорема 1. *Пусть B линейно связно и локально односвязно. Тогда в категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ имеется инициальный объект (E_0, p_0, x_0) (называемый универсальным накрытием); пространство E_0 такого объекта односвязно.*

Доказательство. Возьмем $E_0 = \bigcup_{a \in B} \mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(b, a)$ и положим по определению $p_0(x) = a$, если $x \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(b, a)$. Иными словми, E_0 это множество классов гомотопии (с фиксированными концами) путей $\gamma : [0, 1] \to B$ таких, что $\gamma(0) = b$. Отображение $p_0 : E_0 \to B$ сопоставляет каждому классу гомотопии путей γ точку $\gamma(1) \in B$.

Теперь нужно ввести в E_0 топологию. Пусть $U \subset B$ — открытое множество, и $x \in E_0$ таково, что $p_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} q \in U$ (т.е. x — класс гомотопии путей γ таких, что $\gamma(0) = b$ и $\gamma(1) \stackrel{\text{def}}{=} q \in U$). Обозначим $V(x, U)$ множество классов гомотопии путей вида $x \cdot y$, где y — класс гомотопии путей δ таких, что $\delta(0) = q$ и $\delta(t) \in U$ при всех t. Множества $V(x, U)$ составляют базу топологии в E_0: множество $\mathcal{U} \subset E_0$ называется открытым, если оно является объединением множеств $V(x_\alpha, U_\alpha)$, где индекс α пробегает произвольное (возможно, бесконечное) множество.

Лемма 4. *Такое определение действительно превращает E_0 в топологическое пространство.*

Доказательство леммы. Из определения сразу вытекает, что объединение открытых множеств в E_0 открыто, и множества $\varnothing$ и E_0 открыты. В доказательстве нуждается только открытость пересечения, причем, очевидно, достаточно доказать, что $V(x_1, U_1) \cap V(x_2, U_2)$ открыто (здесь $U_1, U_2 \subset B$ — открытые множества, $x_1, x_2 \in E_0$ — классы гомотопии путей с началом в b и концами $q_1 \in U_1$, $q_2 \in U_2$).

Пусть $y \in V(x_1, U_1) \cap V(x_2, U_2)$ — пусть с началом в b и концом в $q \stackrel{\text{def}}{=} y(1)$, то, очевидно, $q \in U_1 \cap U_2$. Из локальной односвязности B вытекает, что существует односвязное открытое множество $U \ni q$, $U \subset U_1 \cap U_2$. По определению множеств V получем, что $V(y, U) \subset V(x_1, U_1) \cap V(x_2, U_2)$. Тем самым $V(x_1, U_1) \cap V(x_2, U_2)$ открыто (является объединением множеств $V(y, U)$ для всех $y \in V(x_1, U_1) \cap V(x_2, U_2)$), то есть открыто. $\square$

Для произвольного открытого множества $U \subset B$ и произвольного пути $x \in p_0^{-1}(U) \subset E_0$ имеем по определению $V(x, U) \subset p_0^{-1}(U)$. Отсюда вытекает, что $p_0^{-1}(U) = \bigcup_{x \in p_0^{-1}(U)} V(x, U)$ открыто, то есть $p_0 : E_0 \to B$ непрерывно.

Докажем теперь, что пространство E_0 и отображение $p_0 : E_0 \to B$ удовлетворяют условиям леммы 3.

Дискретность прообраза точки Пусть $a \in B$; докажем, что прообраз $p_0^{-1}(a) \subset E_0$ дискретен. По определению $p_0^{-1}(a)$ это фундаментальная группа $\pi_1(B, a)$. Пусть $U \subset B$ — односвязное открытое множество, $a \in U$ и $x \in p_0^{-1}(a) \subset E_0$. Если $y \in p^{-1}(a) \cap V(x, U)$, то $y = x \cdot z$, где $z \in \pi_1(U, a)$ (класс гомотопии петель с началом и концом в a, лежащих целиком в U). В силу односвязности U имеем $z = \mathbf{1}_a$ и $y = x$. Следовательно, открытое множество $V(x, U)$ пересекается с $p_0^{-1}(a)$ только в одной точке x, то есть $x \in p^{-1}(a)$ — изолированная точка. Поскольку x произвольно, $p^{-1}(a)$ дискретно.

Односвязность и локальная односвязность.

Линейная связность и локальная линейная связность. Путь, соединяющий x_0 с произвольным элементом $[\gamma] \in E_0$, есть $[\gamma_s]$, $0 \le s \le 1$, где $\gamma_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(st)$. Отсюда следует, что между любыми двумя точками $y, z \in E_0$ также существует путь (через x_0). Для доказательства локальной линейной связности заметим, что $V(x, U) \subset E_0$, где $U \subset B$ линейно связно, также линейно связно — доказательство такое же, как у линейной связности E_0. Пусть теперь $x \in W \subset E_0$, где W открыто; тогда по определению топологии в E_0 имеем $x \in V(x, U) \subset W$, где $U \subset B$ — открытое множество, содержащее точку $p_0(x)$. В силу локальной линейной связности B множество U можно считать линейно связным.

Тривиальность фундаментальной группы. Пусть теперь $\varphi : [0, 1] \to E_0$ — петля: $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$ (в силу линейной связности все фундаментальные группы E_0 изоморфны). Для любого $s \in [0, 1]$ пусть $\gamma_s : [0, 1] \to B$ — представитель класса гомотопии путей $\varphi(s)$. Пусть $u \in [0, 1]$; положим $\Phi_{u,s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_s((1 - u)t)$, и пусть $\varphi_u(s) \in E_0$ — класс гомотопии путей, содержащий путь $\Phi_{u,s}$. Очевидно, $\varphi_0(s) = \varphi(s)$, и $\varphi_1(s) \equiv x_0$. Тем самым $\varphi_u(s)$ — гомотопия петель в E_0, стягивающая петлю φ; таким образом, $\pi_1(E_0, x_0) = \{1\}$.

Для доказательства локальной односвязности достаточно доказать (почему?), односвязность множества $V(x, U) \subset E_0$, где $U \subset B$ односвязно. Доказательство аналогично доказательству односвязности E_0, подробности — упражнение.

Свойство поднятия пути

Существование поднятия. Пусть $\gamma : [0, 1] \to B$ — произвольный путь, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = c$, и $x = [\delta] \in E_0$ — произвольная точка, для которой $p_0(x) = a$ — иными словами, $\delta : [0, 1] \to B$ — путь, для которого $\delta(0) = b$, $\delta(1) = a$. Для произвольного $s \in [0, 1]$ обозначим $\gamma_s(t)$ путь, заданный формулой $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. Тогда $\Gamma_s \stackrel{\text{def}}{=} \delta \cdot \gamma_s \in E_0$ — путь в B; очевидно, $p_0(\Gamma_s) = \Gamma_s(1) = \gamma(s)$, так что путь $\Gamma : [0, 1] \to E_0$, заданный формулой $\Gamma(s) = \Gamma_s$, является поднятием пути γ, и $\Gamma(0) = x$.

Единственность поднятия. Пусть $\tilde{\Gamma} : [0,1] \to E_0$ — другое поднятие пути γ, для которого $\tilde{\Gamma}(0) = x$. Рассмотрим множество $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in [0,1] \mid \tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s)\}$. Это множество замкнуто, поскольку Γ и $\tilde{\Gamma}$ — непрерывные отображения (почему этого достаточно?) и непусто, потому что содержит 0.

Докажем, что $\Sigma \subset [0,1]$ также и открыто. Пусть $s \in \Sigma$, и $U \subset B$ — односвязное открытое множество, для которого $\gamma(s) \in U$. В силу непрерывности γ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(t) = p_0(\Gamma(t)) = p_0(\tilde{\Gamma}(t)) \in U$ при $|t-s| < \varepsilon$. Обозначим $\gamma_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(st)$; тогда открытое множество $V(\gamma_s, U) \subset E$ пересекается с прообразом $p_0^{-1}(c)$ произвольной точки $c \in U$ не более чем по одной точке (проверьте!). Следовательно, $\Gamma(t) = \tilde{\Gamma}(t)$ при $|t-s| < \varepsilon$. Таким образом, Σ открыто, что ввиду связности отрезка означает, что $\Sigma = [0,1]$ и единстенность поднятия доказана.

Согласно лемме 3, (E_0, p_0) — накрытие с базой B. В качестве отмеченной точки возьмем класс $x_0 \in E_0$, представленный кривой $\gamma_0(t) \equiv b$.

Докажем, что построенный объект (E_0, p_0, x_0) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ — инициальный. Пусть $p_1 : E_1 \to B$ — другое накрытие, $x_1 \in p_1^{-1}(b) \subset E_1$. Пусть $x \in E_0$ — класс гомотопии некоторого пути $\gamma : [0,1] \to B$ с началом в точке b; тогда $p_0(x) = \gamma(1)$. По теореме о накрывающей гомотопии существует и единствен путь $\gamma_1 : [0,1] \to E_1$ такой, что $p_1 \circ \gamma_1 = \gamma$ и $\gamma_1(0) = x_1$. Положим по определению $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1(1)$, получив тем самым отображение $f : E_0 \to E_1$. Теперь $p_1(f(y)) = p_1(\gamma_1(1)) = \gamma(1) = p_0(y)$, и $f(x_0) = x_1$. Поскольку p_1 — накрытие, существует открытое множество $U \subset B$, $p_0(y) \in U$, и открытое множество $V \subset E_1$, $f(y) \in V$ такое, что $p_1|_V : V \to U$ — гомеоморфизм. Тогда на открытом множестве $W \stackrel{\text{def}}{=} p_0^{-1}(U) \subset E_0$ имеет место равенство $f = (p_1|_V)^{-1} \circ p_0$, откуда вытекает, что f непрерывно во всех точках множества W, в том числе в точке y. Поскольку y произвольно, $f : E_0 \to E_1$ — непрерывное отображение и тем самым — морфизм категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$.

Пусть теперь $g : E_0 \to E_1$ — произвольный морфизм. Положим $\gamma_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(st)$. Тогда $p_1(g(\gamma_s)) = p_0(\gamma_s) = \gamma(s)$, так что кривая $\Gamma_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} g(\gamma_s))$ является поднятием кривой γ в накрытие E_1, для которого $\Gamma_1(0) = g(\gamma_0) = g(x_0) = x_1$. Поскольку такое поднятие единственно ($p_1 : E_1 \to B$ — накрытие!), морфизм g тоже единствен. Тем самым доказано, что (E_0, p_0, x) — инициальный объект категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$. $\square$