1. ТЕОРЕМА БРАУЭРА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Задача 1 (вариации теоремы Брауэра)**.** Существует ли непрерывное отображение $f : X \to X$ без неподвижных точек, если X это а) отрезок $[0,1]$? б) круг без границы: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$? в) кольцо $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$? г) круг с двумя дырками (круг, из которого вырезаны два непересекающихся круга)? д) сфера $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ и (как обобщение) n-мерная сфера $\{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2+\dots+x_n^2 = 1\}$? е) тор (поверхность бублика)? ж) тор, из которого вырезана круглая дырка (граница осталась)?

В задачах 2–3 содержится доказательство забавного факта, известного как “теорема о причесывании ежа”.

Напомним, что $\gamma^{(k)} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — замкнутая кривая, заданная формулой $\gamma^{(k)}(t) = (\cos kt, \sin kt)$; здесь $k \in \mathbb{Z}$. Считаем известным, что кривые $\gamma^{(k)}$ с различными k не гомотопны друг другу (как замкнутые кривые в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

Задача 2. Пусть V — векторное поле без нулей на круге $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Пусть $0 \le s \le 1$ и $\nu_s : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — кривая, заданная формулой $\nu_s(t) = V(s\cos t, s\sin t)$. Докажите, что все кривые ν_s гомотопны друг другу и кривой $\gamma^{(0)}$.

Задача 3. а) Пусть V — векторное поле на сфере $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, не имеющее нулей в верхней половине сферы (т.е. при $z \ge 0$; это причесывание верхней половины ежа). Пусть $\varphi(t) \in \omega$ — угол, образуемый вектором $V(x,y,0)$ и вектором, касательным к экватору $z = 0$, в точке $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$; $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — единичная окружность с центром в начале координат. Докажите, что кривая $\varphi : [0,2\pi] \to \omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ гомотопна кривой $\gamma^{(1)}$. б) Пусть поле V не имеет нулей также и в нижней половине сферы (при $z \le 0$; это причесывание всего ежа), и ψ — кривая, аналогичная φ, построенная для нижнего полушария. Как связаны кривые φ и ψ? в) Докажите, что векторного поля V, не имеющего нулей на сфере, не существует (еж не причесывается — в этом и состоит теорема).

Задача 4 (вариации теоремы о причесывании ежа)**.** Существует ли на “еже” X непрерывное касательное векторное поле без нулей (“причесывание”), если “еж” X это а) окружность? б) в) тор (поверхность бублика)? г) тор, из которого вырезана круглая дырка (граница осталась)? д) трехмерная сфера $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\}$? е) лента Мебиуса? (лента Мебиуса это прямоугольник, две противоположные стороны которого склеены “с перекруткой”) ж) крендель? (крендель можно себе представить как два тора с дыркой из задачи 4г, склеенные по границам дырок).