РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ЭКЗАМЕНА 16 ДЕКАБРЯ 2018 Г.

Задача 1а. Ответ: не гомотопны. Доказательство: представим тор как квадрат, у которого пары противоположных сторон склеены, а дырку — как круг малого радиуса с центром в центре квадрата (ср. с указанием к задаче). Тогда видно, что объединение сторон квадрата — деформационный ретракт тора с дыркой и, следовательно, ему гомотопически эквивалентно. Само объединение представляет собой букет двух окружностей, так что его фундаментальная группа — свободная группа с двумя образующими, a и b; в качестве образующих можно взять классы гомотопии петель, идущих по сторонам квадрата.

Как было показано в лекциях, отображение окружности в (линейно связное) топологическое пространство, определенное с точностью до гомотопии, порождает элемент фундаментальной группы пространство, определенный с точностью до сопряжения. Для отображения γ_1 таким элементом будет $aba^{-1}b^{-1}$, а для γ_2 — обратный к нему, т.е. $bab^{-1}a^{-1}$.

Тем самым нужно решить алгебраическую задачу — доказать, что в свободной группе с двумя образующими a и b элементы $aba^{-1}b^{-1}$ и $bab^{-1}a^{-1}$ не сопряжены. Это можно сделать многими способами, вот один из них. Предположим, что утверждение неверно и элементы сопряжены. Тогда такие же элементы будут сопряжены в *любой* группе, порожденной двумя элементами a и b.

Таким образом, достаточно найти какую-нибудь группу и в ней два элемента a и b таких, что $aba^{-1}b^{-1}$ и обратный к нему элемент не сопряжены. Например, можно взять в качестве группы $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ (обратимые вещественные матрицы 3×3), и $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Тогда $aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $bab^{-1}a^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (обратная матрица). Эти две матрицы имеют разные собственные значения и, следовательно, не сопряжены.

Задача 1б. Ответ: гомотопны. Доказательство — построением явной гомотопии; если не удается ее придумать, то посмотрите картинки в одной из работ, где эта задача решена (таких довольно много).

Задача 2а. Ответ: компактно. Сопоставим набору из n действительных чисел $x_0,\dots,x_n$ кусочно-линейную функцию $f \in C[0,1]$ такую, что $f(k/n) = x_k$, а на каждом отрезке $[k/n,(k+1)/n]$ функция линейна. Как нетрудно убедиться, это отображение — гомеоморфизм из $\mathbb{R}^{n+1}$ в множество кусочно-линейных функций с узлами k/n, $k = 0,\dots,n$.

Прообраз множества K_n при этом отображении равен $\{(x_0,\dots,x_n) \mid x_0 = 0, |x_1 - x_0| \le 1/n, \dots, |x_n - x_{n-1}| \le 1/n\}$. Это множество замкнуто (поскольку функция $|t|$ непрерывна, а все неравенства нестрогие) и ограничено (поскольку $|x_k| \le k$ для всех k). Следовательно, это множество компактно, и гомеоморфное ему множество K_n также компактно.

Задача 2б. Ответ: компактно. Рассмотрим подмножество $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \mid 0 \le x_1 \le \dots \le x_n = 1, |y_1| \le x_1, |y_2 - y_1| \le x_2 - x_1, \dots, |y_n - y_{n-1}| \le x_n - x_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{2n}$; очевидно, оно замкнуто и ограничено и, следовательно, компактно. Рассмотрим отображение $F : A_n \to C[0,1]$, сопоставляющее точке $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in A_n$ кусочно-линейную функцию, принимающую значение y_k в каждой точке x_k и линейную на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$; здесь $k = 1,\dots,n$. Это отображение непрерывно — проверьте! (особого внимания при проверке требует непрерывность в точках, где два или более числа x_k равны друг другу).

Очевидно, $K_n = F(A_n)$ и, следовательно, K_n — компакт (непрерывный образ компакта).

Отметим, что отображение F не биективно: если угловые коэффициенты двух соседедних звеньев ломаной (графика функции) совпадают, то местоположение разделяющего их узла x_k определено неоднозначно. Но для доказательства это неважно.

Задача 3. Ответ: это свободная группа с 5 образующими. Для доказательства спроектируем $B \setminus A$ на граничную сферу шара B из центра шара. Очевидно, получится двумерная сфера, из которой выкинуты 6 точек пересечения ее с координатными осями. Как нетрудно доказать, проекция является гомотопической эквивалентностью между этими двумя множествами.

Сфера без точки гомеоморфна плоскости; сфера без 6 точек — плоскости без 5 точек. Плоскость без n точек гомотопически эквивалентна букету n окружностей (докажите!), откуда и вытекает ответ.

Задача 4. К сожалению, эту задачу (кроме несложного пункта а)) никто не решил; поэтому мы приведем только ответы и конструкцию клеточного разбиения, а остальное (построение характеристических отображений, доказательство ответов) оставим в качестве крайне полезного упражнения.

Множество возможных положений вектора e_1 — двумерная сфера (радиуса 1 с центром в начале координат). Построим на сфере касательное векторное поле, имеющее единственную нулевую точку (скажем, в северном полюсе). Для этого сначала проведем через северный полюс прямую ℓ, касательную к сфере, а затем проведем через прямую ℓ всевозможные плоскости. Каждая из них пересекает сферу по окружности, проходящей через северный полюс; через каждую точку сферы, кроме северного полюса, проходит ровно одна такая окружность. Определим в точке a сферы касательный вектор так, чтобы он касался этой единственной окружности и был направлен относительно этой окружности против часовой стрелки (подумайте, что это значит). Так получается касательное векторное поле во всех точках сферы, кроме северного полюса. В северном полюсе положим поле по определению равным нулю.

Разобьем пространство $V(2,3)$ на клетки $s_3 \sqcup s_2 \sqcup s_1 \sqcup s_0$ (по одной клетке каждой размерности) следующим образом. Пара $(e_1, e_2) \in s_3$, если e_1 не указывает на северный полюс, а e_2 не сонаправлен вектору определенного выше векторного поля, приложенному в точке e_1. Если же e_2 ему сонаправлен, то пара $(e_1, e_2) \in s_2$. Теперь зафиксируем один (из двух) векторов единичной длины, направленных вдоль прямой ℓ. Нульмерная клетка s_0 содержит, как и полагается, ровно одну точку — пару (e_1, e_2), где e_1 указывает на северный полюс, а e_2 — этот вектор. Одномерная клетка s_1 содержит все оставшиеся пары (e_1, e_2).

1-остов $s_1 \sqcup s_0$ состоит из всех пар (e_1, e_2), где e_1 указывает на северный полюс, — следовательно, 1-остов гомеоморфен окружности. Поскольку 1-остов линейно связен, само пространство тоже линейно связно (такая теорема была в лекциях).

Ответ в пункте б): $\pi_1(V(2,3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (для доказательства нужно вычислить характеристическое отображение двумерной клетки). Отображение в пункте в) — (единственный) эпиморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 5. Нам потребуется следующий факт, доказательство которого — упражнение:

Лемма. *Любая подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^k$ для некоторого $k \le n$. Индекс подгруппы (т.е. количество смежных классов) конечен тогда и только тогда, когда $k = n$.*

Для произвольной группы G можно рассмотреть коммутативную группу H, полученную добавлением к G соотношений $ab = ba$ для всех пар элементов $a, b \in G$. Или, что эквивалентно, H является фактор-группой G по нормальной подгруппе $N \subset G$, порожденной всеми коммутаторами, то есть элементами вида $[a,b] \stackrel{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1}$ для всех $a, b \in G$. Группа N называется коммутантом G.

Как известно, фундаментальная группа сферы с g ручками порождена $2g$ образующими $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ с единственным соотношением $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$. Следовательно, ее фактор по коммутанту порожден теми же образующими безо всяких соотношений (кроме коммутирования) и, тем самым, изоморфен $\mathbb{Z}^{2g}$.

Пункт а. Если $p : M_g \to M_1$ — накрытие, то группа $G = \pi_1(M_g)$ должна быть подгруппой $\pi_1(M_1) = \mathbb{Z}^2$, то есть должна быть, согласно лемме, тривиальна, изоморфна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$. Но тогда и фактор G по коммутанту должен быть таким же, что, согласно сказанному выше, возможно только при $g = 1$.

Пункт б. Пусть $p : M_1 \to M_g$ — накрытие. Прообраз $p^{-1}(b) \subset M_1$ любой точки $b \in M_g$ дискретен, а поскольку M_1 компактно, то он конечен. Иными словами, накрытие конечнолистное, и группа $G = \pi_1(M_g)$ должна содержать подгруппу конечного индекса (равного числу листов накрытия), изоморфную $\pi_1(M_1) = \mathbb{Z}^2$. Следовательно, то же самое должно быть верно для факторов по коммутанту: фактор G по коммутанту, изоморфный $\mathbb{Z}^{2g}$, должен содержать подгруппу конечного индекса, изоморфную фактору $\mathbb{Z}^2$ по коммутанту, т.е. самой $\mathbb{Z}^2$. Согласно лемме, это возможно только при $g = 1$.

Пункт в. Трехлистные накрытия двумерного тора взаимно однозначно соответствуют подгруппам H индекса 3 в группе $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$. Согласно лемме, каждая такая подгруппа сама изоморфна $\mathbb{Z}^2$ и порождена двумя векторами $(p,q), (r,s) \in \mathbb{Z}^2$. Согласно пункту а), накрывающее пространство — двумерный тор. Нетрудно доказать (проделайте!), что определитель матрицы $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ равен, с точностью до знака, индексу подгруппы, т.е. ± 3. Поскольку всегда можно умножить образующую в подгруппе на -1, можно считать, что определитель равен 3.

Поскольку подгруппа $H \subset \mathbb{Z}^2$ имеет индекс 3, имеем $3v \in H$ для всякого вектора $v \in \mathbb{Z}^2$. В частности, $(3,0) \in H$, откуда следует, что группа H порождена векторами $(p+3k, q), (r+3\ell, s)$ для произвольных $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Иными словами, можно без ограничения общности считать, что образующие группы имеют вид $(p,q), (r,s)$, где $p, r \in \{0,1,2\}$. Рассмотрим разные случаи.

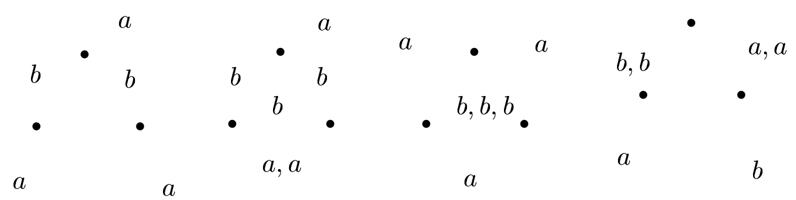
1) $p = r = 0$ — такие векторы не порождают подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}^2$. Тем самым $(3,0)$ сама является образующей в H. Поскольку определитель равен 3, получается $q = s = 1$ — подгруппа H порождена $(3,0)$ и $(0,1)$.

2) $p = 0, r = 1$. Поскольку определитель равен 3, получаем $s = 3$. Тогда, очевидно, без ограничения общности можно считать, что $q \in \{0, 1, 2\}$, и это три разные подгруппы. То же самое, если наоборот: $p = 1$, $r = 0$.
3) $p = 0, r = 2$. Такое невозможно: определитель делится на 2 и не может быть равным 3.
4) $p = r = 1$. Очевидно, то же самое, что $p = 0$, $r = 1$.
5) $p = 2$, $r = 1$ или наоборот. Очевидно, то же самое, что $p = 0$, $r = 1$.
6) $p = 2$, $r = 2$. Очевидно, то же самое, что $p = 0, r = 2$, т.е. тоже невозможно.

Тем самым получается 4 накрытия, соответствующих подгруппам $H \subset \mathbb{Z}^2$, порожденных образующими $\{(3, 0), (0, 1)\}$, $\{(1, 0), (0, 3)\}$, $\{(1, 1), (0, 3)\}$ и $\{(1, 2), (0, 3)\}$.

Пункт г. Накрывающее пространство трехлистного накрытия букета двух окружностей представляет собой граф, содержащий 3 вершины валентности 4 и 6 ребер (которые могут быть петлями, а могут и не быть). Мы будем обозначать a те ребра, которые переводятся накрытием в первую окружность букета, b — во вторую; к каждой вершине примыкает два конца a-ребер и два конца b-ребер (потому что так устроена вершина букета, а накрытие — локальный гомеоморфизм). Мы перечислим только накрытия со связным накрывающим пространством; разобраться с несвязными — легкое упражнение. Несложный перебор дает 4 накрытия на рисунке ниже, плюс еще 2 накрытия, которые получаются из первых двух, если поменять местами метки a и b (третье и четвертое накрытие переходят при этой операции в себя).

Накрытие не является нормальным тогда и только тогда, когда в базе существует петля, которая поднимается в накрывающее пространство как в виде петли, так и в виде незамкнутого пути. Отсюда вытекает, что нормальными являются первое и третье накрытие, а также накрытие, полученное из первого обменом меток a и b. Остальные накрытия не нормальны, т.к. одна и та же метка стоит в них как на петле, так и на обычном ребре.



Пункт д. В том виде, как он сформулирован, пункт не имеет смысла (простите за ошибку в формулировке…), поскольку параллель и меридиан тора не определены однозначно (так же как группа $\mathbb{Z}^2$ может иметь разные пары образующих). Выбирая разные параллели и меридианы, можно получить разные рисунки. Поскольку этот пункт все равно никто не решил, мы оставим в качестве задачи разобраться, какие именно рисунки получаются из каких именно накрытий тора.