Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

АЛГЕБРА, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Лекция 2 (27 сентября 2018): Числа и уравнения

2.0. "Что есть число?"

Вопрос поставлен в кавычки, поскольку не имеет точного математического смысла; по существу он является терминологическим и находится за пределами рассмотрений нашего курса. Кроме того, в этом вопросе не очень уважительно используется обрывок заголовка монументальной работы **[Dedekind1893]** и переводится в вопросительную форму приписываемый пифагорейцам слоган *всё есть число*.

Тем не менее, слово *число* используется в курсе, и надо договориться об его употреблении. Основной смысл этого слова будет связан с общепринятыми *числовыми множествами*, которые мы будем называть *классическими*; как упоминалось во вводной лекции, это понятие эволюционировало в течение тысячелетий, и нет никаких причин считать сегодняшнее понимание окончательным. Альтернативный смысл связан со *свойствами* классических числовых множеств, которые мы аксиоматизируем и будем тщательно изучать, начиная с сегодняшней лекции.

2.1. Системы полиномиальных уравнений

2.1.0. Краткая запись. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \dots \\ f_m = 0 \end{cases}$$

в которой мы, в отличие от первой лекции, <u>не</u> указываем аргументов и <u>не</u> различаем *неизвестные* и *параметры* (это – разные понятия не с точки зрения алгебры, а с точки зрения логики).

Сегодня мы будем пользоваться школьным понятием многочленов, а к современному ("взрослому") перейдём в лекции 12.

2.1.1. Многочлены: где лежат коэффициенты. Даже в школьной математике различают многочлены с *целыми* и с "произвольными" – то есть *вещественными* – коэффициентами.

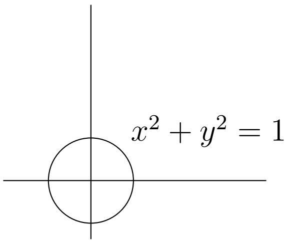
Мы введём принятую в современной математике[1] специальную букву $\Bbbk$ для множеств, в которых лежат коэффициенты рассматриваемых многочленов. Эта буква происходит от немецкого слова *körpen* (тело, поле) и напоминает о второй половине девятнадцатого века, когда алгебра была в основном немецкой.

В дальнейшем на множествах коэффициентов $\Bbbk$ будут вводиться различные *структуры*.

2.1.2. Уравнения: где лежат решения. С давних пор принято рассматривать решения, лежащие в большем множестве, чем множество коэффициентов $\Bbbk$. Так, поиск *пифагоровых треугольников*, то есть *целочисленных* решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$, сводится к

[1] точнее, в её основной письменной, то есть ТеХовской, версии

поиску *рациональных* решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$. Это, в свою очередь, сводится к поиску рациональных точек на *окружности*



то есть к поиску *рациональных* решений среди *вещественных*.

Ещё пример: приведённые в первой лекции решения кубических уравнений невозможно полностью проанализировать без выхода в *комплексную* область.

Для множества *решений* систем полиномиальных уравнений мы примем обозначение

$$\mathbb{K} \supseteq \Bbbk.$$

2.2. Классические числовые множества

2.2.0. Натуральные числа. Следуя известному афоризму

Бог создал натуральные[2] *числа, всё остальное — дело рук человека,*

принадлежащему немецкому математику Леопольду Кронекеру (1823 – 1891), коллеге и сопернику уже процитированного Рихарда Дедекинда (1831 – 1916), мы будем считать известным множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

0 включён во множество натуральных чисел согласно *французской традиции*, противоречащей российской и американской; причины будут объяснены ниже.

2.2.1. Отступление: язык теории множеств. Этот язык в основном предполагается известным; с конца 19-го века на нём излагается вся *преподаваемая* математика.

Его *первичными,* то есть не определяемыми ни через какие другие, понятиями являются прежде всего *множество* и *элемент*

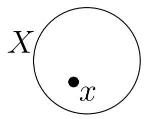
[2]в русских переводах оригинала *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* встречаются и *натуральные*, и *целые* числа; мы выбрали более удобный вариант...

множества; впоследствии мы добавим ещё несколько.

В языке два основных глагола: *быть элементом* и *равняться*; вам известны соответствующие значки

$$\in \quad = .$$

Со значком $\in$ связана следующая картинка:



$x \in X$

Проиллюстрировать значок равенства я не умею...

Вместо определения:

Множество X считается заданным, если

- *Про ЛЮБОЙ объект x известно: $x \in X$ или же $x \notin X$;*
- *Про ЛЮБЫЕ ДВА $x, x' \in X$ известно: $x = x'$ или же $x \neq x'$.*

С понятием равенства связаны некоторые проблемы в современных основаниях математики. См., например, доклад П. Делиня на конференции памяти Воеводского в Принстоне, сентябрь 2018.

Желание решать *все* уравнения вида $a + x = b$ приводит к расширению множества натуральных чисел до множества *целых*[3]

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Конструкция целых чисел (*дело рук человеческих...*) по натуральным (*создание Бога...*) называется построением *группы Гротендика*. Она будет напомнена позже, по мере введения теоретико-множественной символики.

Пока предварительно:

$$\mathbb{Z} := \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\approx}$$

где

$$(x, y) \approx (x', y') :\Longleftrightarrow [x + y' = x' + y].$$

[3]обозначение происходит от немецкого слова *zahlen* – (просто) *числа.*

В сегодняшних обозначениях

$$\Bbbk = \mathbb{N}, \mathbb{K} = \mathbb{Z}.$$

2.2.3. Рациональные числа. Желание решать *все* уравнения вида $ax = b$ при $a \neq 0$ приводит к расширению множества целых чисел до множества *рациональных*[4]. Мы введём множество

$$\dot{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

и определим

$$\mathbb{Q} := \frac{\mathbb{Z} \times \dot{\mathbb{Z}}}{\approx},$$

где

$$[(p, q) \approx (p', q')] :\Longleftrightarrow pq' = p'q].$$

Класс $\approx$-эквивалентности пары (p, q) обозначается $\frac{p}{q}$ – отметим, что в стандартные обозначения современной математики вкралась *нелинейность*!

Используемые теоретико-множественные понятия и значки будут систематически введены ниже; конструкция рациональных чисел по целым является частным случаем построения *поля частных* и будет введена в естественной общности.

2.2.4. Вещественные числа (набросок). Далее на сцену выходят числа, явно имеющие геометрический смысл, но (как это иногда сравнительно легко установить, а иногда – настолько трудно, что требуются многие столетия) не лежат[5] в $\mathbb{Q}$. Таково, прежде всего, отношение диагонали квадрата к его стороне, которое определяется как решение уравнения $x^2 = 2$. Безупречное евклидово доказательство[6] того, что

$$\nexists x \in \mathbb{Q}[x^2 = 2]$$

(см. **[Евклид1948]** или любое другое издание "Начал"), наверное, означало крах *атомизма*: были обнаружены *несоизмеримые*

---

[4]обозначение происходит от английского слова *quotient* – *дробь*.

[5]мы избегаем называть их по-школьному *иррациональными числами*, поскольку на данной стадии обсуждения они пока вообще не *числа*, а "величины" , которые хочется определить.

[6]видимо, первой *теоремы несуществования*

длины, что плохо сочетается с представлением о том, что всё сущее составлено из одинаковых элементарных длин. Присоединение к рациональным числам всех *евклидовых иррациональностей* (вспомним результат Фибоначчи из лекции 1) потребовало бы достаточно умеренного расширения множества рациональных чисел; но этого расширения не хватило бы для *удвоения куба*, поскольку

$$\nexists x \in \mathbb{Q}[x^3 = 2].$$

Можно было бы пойти ещё дальше и присоединить к рациональным числам *все корни всех многочленов с целыми коэффициентами.* И процедурой присоединения "несуществующих" корней, и только что описанной числовой совокупностью, которое называется *полем алгебраических чисел* и обозначается $\overline{\mathbb{Q}}$, мы будем заниматься. Но и её не хватит для того, чтобы выразить *отношение длины окружности к её диаметру*, то есть

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

– число π трансцендентно! Этот результат был доказан только в XIX-м веке (см. **[Lindemann1882]**); из него, в частности, следует невозможность *квадратуры круга*, но для установления этого потребовалось около двух тысяч лет.

Радикальное решение проблемы построения числовой совокупности, которая содержит все геометрические осмысленные величины – введение множества *вещественных* чисел $\mathbb{R}$. В нескольких словах этого сделать, по-видимому, нельзя, но мы в этом курсе достаточно подробно опишем общую процедуру *пополнения метрического поля*, причём окажется, что у $\mathbb{Q}$ есть и неклассические расширения, не менее естественные, чем $\mathbb{R}$.

2.2.5. Комплексные числа. Последнее же расширение строится совсем просто. К вещественным числам добавляется *мнимая единица*, то есть "несуществующий" корень уравнения

$$\mathrm{i}^2 = -1,$$

и вводятся *комплексные* числа

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i}.$$

2.2.6. Общий обзор. На этом наш беглый осмотр классических числовых множеств

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(состоявший, впрочем, в основном из обещаний провести конструкции расширений в большей общности) заканчивается. Дальнейшее присоединение корней к $\mathbb{C}$ невозможно в силу *основной теоремы алгебры*. Мы будем рассматривать и бо́льшие алгебраические образования – например, *поле рациональных функций* $\mathbb{C}(z)$ – но с классических позиций они не воспринимаются как числа и ответу на наш вопрос *что есть число?* не способствуют.

2.3. Числа как множества со структурами

2.3.0. О бурбакистской математике. Начиная с этого момента, мы последовательно становимся на *бурбакистскую* точку зрения, не смущаясь тем, что в устах многих почтенных математиков и физиков это слово является бранным, означающим формализм, отсутствие воображения, выхолащивание физического и геометрического смысла понятий и т.п.

Бурбакистский взгляд на математику – по крайней мере на её устоявшиеся, *преподаваемые* разделы – заключается в том, что там, где это возможно, следует видеть *множества со структурами*. Мы не будем обсуждать определение структур хотя бы потому, что я не уверен, что оно существует в разумной общности; но на отдельных стадиях развития математики (например, на нынешней) структуры задаются сравнительно небольшим списком, и его разумно взять за основу.

2.3.1. Структуры. Классические числовые множества фигурируют вместе со следующими структурами:

- алгебраические операции;
- топология;
- порядок.

Топология не фигурирует в школьной математике, и на данном уровне рассмотрений можно (временно!) ограничиться интуитивным пониманием: имеет смысл понятие чисел, *достаточно близких* к данному.

Но тут оказывается, что даже для классических числовых множеств эти структуры неравноправны! Так, порядок определён только для подмножеств множества вещественных чисел, причём мы видели при обсуждении кубических уравнений, что он сильно сбивает с толку. Итальянцам хотелось работать только с реальными, *положительными* количествами, кубический корень прикидывался однозначной функции, некоторые корни объявлялись *ложными* и т.п. Полная ясность наступила лишь при воцарении комплексных чисел, на которых никакого порядка нет.

Что касается топологии, то она совершенна необходима в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$: вычисления с вещественными и комплексными числами без *приближений* невозможны. Однако на множествах натуральных и целых чисел содержательной топологии нет, эти множества *дискретны*. На множестве рациональных чисел, как мы намекнули, есть много хороших топологий. Наконец, когда мы изучали квадратные и кубические уравнения, мы видели, что нетривиально ведут себя *конечные* числовые множества, также не снабжённые естественной топологией, и эти "числа" тоже заслуживают рассмотрения.

Несомненно остаются алгебраические операции, и именно они будут в центре нашего внимания. Такая позиция полностью соответствует названию нашего курса.

2.4. Категорные операции над множествами

2.4.0. Общие понятия. Слушатели несомненно знакомы с такими операциями над множествами, как *объединение* и *пересечение*. Речь сейчас пойдёт <u>не</u> о них. Операции $\bigcup$ и $\bigcap$ мы будем в дальнейшем считать определёнными лишь на подмножествах фиксированного множества, тогда как рассматриваемые сейчас операции будут сопоставлять двум совершенно произвольным множествам третье множество.

Мы рассмотрим три категорные операции, причём называться они будут так же, как операции над числами. Однако вводить мы их будем в порядке, противоположном традиционному. Это получит объяснение в дальнейшем, при переходе на категорный язык.

Фиксируем обозначения X, Y произвольных множеств.

2.4.1. Возведение в степень. Здесь мы будем опираться на очередное первичное понятие теории множеств – понятие *отображения.*

$$Y^X := \{f : X \to Y\}.$$

Использованный нами (анти)алфавитный порядок может показаться противоестественным; его выбор будет объяснён ниже.

2.4.2. Декартово произведение. Эта операция уже использовалась при построении множеств целых и рациональных чисел.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

2.4.3. О "сумме" множеств. Это – самая трудная из категорных операций, и мы её лишь упоминаем. В случае, когда X и Y – непересекающиеся подмножества одного и того же множества, их сумма совпадает с объединением. В общем случае множества X и Y можно реализовать нужным образом – например, вложив в

$$X \times Y \times \{1, 2\}.$$

Пример. Пусть X – множество студентов Независимого Университета, сдающих алгебру, а Y – множество сдающих анализ. Тогда $X + Y$ взаимно однозначно соответствует объединению множеств заполненных строк в двух ведомостях.

В дальнейшем мы приведём полноценное определение этой операции; её результат будет называться *копроизведением.*

2.4.4. Случай конечных множеств. Мы будем работать с понятием *конечного множества* на интуитивном уровне и обозначать $\#Z \in \mathbb{N}$ *количество элементов* в множестве Z.

Тогда

$$\#\big(Y^X\big) = \#Y^{\#X};$$
$$\#\big(X \times Y\big) = \#X \cdot \#Y;$$
$$\#\big(X + Y\big) = \#X + \#Y.$$

Читателю предлагается продумать эти равенства и по возможности обосновать их.

2.4.5. Бинарные операции. Мы подошли к центральному понятию современной алгебре. На множестве Z рассматриваются операции

$$* \in Z^{Z \times Z}.$$

Иначе говоря, бинарная операция представляет собой отображение

$$* : Z \times Z \longrightarrow Z,$$

и для таких отображений принято использовать *инфиксную* запись

$$*(z_1, z_2) =: z_1 * z_2.$$

Литература

[Dedekind1893] Dedekind, Richard, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Auflage, Braunschweig: Vieweg 1888.
[Lindemann1882] Ferdinand von Lindemann, *Ueber die Zahl* π. Mathematische Annalen 20 (1882), pp. 213-225.
[Евклид1948] ЕВКЛИД. *Начала.* Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948–51.