Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

АЛГЕБРА, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Лекция 10 (22 ноября 2018): КРАТКО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

10.0 Теоремы Силова (доказательства)

(a)$G \in\in \mathcal{GRP}$, $G : \mathrm{Sub}(G)$ левыми сдвигами.
Примеры. $\mathsf{S}_3 : \mathrm{Sub}_2(\mathsf{S}_3)$, 15=3+3+3+6.
$\mathsf{S}_3 : \mathrm{Sub}_3(\mathsf{S}_3)$, 20=2+6+6+6.

(b) Пусть теперь $\#G < \infty$, $p \in \Pi, \#G \in p\mathbb{N}$.
$n := \mathrm{ord}_p(\#G)$. Дальше

$$G : \mathrm{Sub}_{p^n}(G)$$

Лемма. $\binom{\#G}{p^n} \notin p\mathbb{N}$.
Следствие. $\exists X \in \mathrm{Sub}_{p^n}(G); \#(G \cdot X) \notin p\mathbb{N}$.

$H := G_X$. По определению $H \cdot X = X$.
$H : X$ свободно (потому что сдвигами...). Следовательно,

$$\#H \leq \#X = p^n.$$

С другой стороны, $\#H = \frac{\#G}{\#Y}$, поэтому

$$\mathrm{ord}_p(H) = \mathrm{ord}_p(G) - \mathrm{ord}_p(X) = \mathrm{ord}_p(G) = p^n,$$

так что

$$\#H \geq \#X = p^n.$$

Итого

$$\boxed{\#H = p^n}$$

Определение.

$$\mathrm{Syl}_p(G) := \{H \in \mathrm{SubGr}(G) \mid \#H = p^{\mathrm{ord}_p(\#G)}\}$$

Установлена
Первая теорема Силова. $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \varnothing$

Вторая теорема Силова. *Все силовские p-подгруппы данной группы сопряжены.*
Доказательство. Пусть $H_1, H_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Заставим H_1 действовать на левых смежных классах $\{gH_2\}$ левыми сдвигами.

$$H_1 : (G/H_2)$$

Все орбиты имеют порядки $\in p^{\mathbb{N}}$, но их общее количество $\notin p\mathbb{N}$, поэтому найдётся хотя бы одна 1-элементная орбита, то есть

$$\exists g; H_1 = (H_1)_{gH_2}$$

...НО ВСЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ГРУППЫ СОПРЯЖЕНЫ...
а H_2–стационарная группа очевидной точки.
■

Третья тС. $[\#\mathrm{Syl}_p(G) \in (\mathbb{N}p+1) \wedge [\#\mathrm{Syl}_p(G) \mid \#G]$.
Доказательство. G действует на $\mathrm{Syl}_p(G)$ сопряжениями... ■

10.1. Центры $p-$групп

Если $G \in\in \mathcal{GRP}$,$p \in \Pi$ и $\#G \in p^{\dot{\mathbb{N}}}$, то $\mathrm{Cen}(G) \neq \{1\}$.
На себе сопряжениями...

10.2. О классификации конечных абелевых групп

$$A = \prod_{p \in \Pi} A_p,$$

где $\#A_p = p^{\mathrm{ord}_p(A)}$