

1

- 1.1. Приведите три примера невырожденных систем двух линейных уравнений с целыми с двумя неизвестными, в которых и коэффициенты, и решения целы. Постройте графические решения этих систем на клетчатой бумаге.
- 1.2. Выведите формулы для решений систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, аналогичные формулам для систем двух уравнений с двумя неизвестными. Что представляет собой условие невырожденности?
- 1.3. Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при решении систем линейных уравнений.
- 1.4\*. Выразите  $\cos \frac{2\pi}{17}$  через рациональные числа с помощью арифметических операций и извлечений квадратных корней. **Подсказка.** Для разминки полезно рассмотреть 5 вместо 17. Ответ можно подсмотреть у (19-летнего...) Гаусса.
- 1.5\*. Вычислите  $1^5 + 2^5 + \dots + 2018^5$ . **Указание.** Введите функции  $S_k(n) := 1^k + 2^k + \dots + n^k$  и докажите, что  $S_k$  – многочлен степени  $k + 1$ . Вычислите  $S_0, S_1, S_2, \dots$  – сначала решив системы линейных уравнений, а затем сравнив  $S_k$  с производными  $S'_{k+1}$ .
- 1.6. Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и тремя разными *целыми* решениями. Находятся ли эти решения по формуле Кардано?
- 1.7. Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и единственным вещественным решением, которое к тому же *цело*. Находится ли это решение по формуле Кардано?
- 1.8. Найдите такой кубический многочлен  $f$ , что  $f(1) = 7868$ ,  $f(2) = 29891$ ,  $f(3) = 80076$  и  $f(4) = 170513$ .
- 1.9. Доказав, что при любом целом  $n$  функция  $x \mapsto \cos(nx)$  есть многочлен от  $\cos x$  (эти многочлены называются *многочленами Чебышёва*), вычислите  $\cos \frac{\pi}{16}$ ,  $\cos \frac{\pi}{9}$  и  $\cos \frac{\pi}{12}$ .
- 1.10. Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при выводе формулы Кардано.
- 1.11\*. Постройте кубический многочлен с целыми коэффициентами, корни которого –  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  и  $\cos \frac{6\pi}{7}$ .
- 1.12\*\*. Какие ещё числа вида  $\cos(r\pi)$ , где  $r$  – рациональное число, являются корнями квадратных или кубических многочленов с целыми коэффициентами?
- 1.13\*. Сведите задачу построения треугольника по трём биссектрисам к решению кубического уравнения. Приведите численные примеры.

20 сентября, Г.Б. Шабат