

3

3.1. Введём на множестве \mathbb{N} операции

$$x \uparrow y := \max(x, y),$$

$$x \downarrow y := \min(x, y).$$

Для каких $\oplus, \otimes \in \{+, \cdot, \uparrow, \downarrow\}$ имеет место "дистрибутивность"

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} [x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)]?$$

3.2. Введём на множестве $\text{Sub}(\mathbb{N})$ операции

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\},$$

$$X \cdot Y := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Для каких $\oplus, \otimes \in \{+, \cdot, \cup, \cap\}$ имеет место "дистрибутивность"

$$\forall X, Y, Z \in \text{Sub}(\mathbb{N}) [X \otimes (Y \oplus Z) = (X \otimes Y) \oplus (X \otimes Z)]?$$

В каждой из задач 3.1 и 3.2 задаётся по 16 вопросов!

3.3. Какие свойства полукольца $(\mathbb{N}; +, \cdot; 0, 1)$ использовались при решении задач 3.1 и 3.2? На какие другие числовые полукольца распространяются ответы к этим задачам?

3.4. Изучите системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в полукольцах $(\text{Sub}(\mathcal{U}); \cup, \cap; \emptyset, \mathcal{U})$.

3.5. Проверьте аксиомы кольца для пятёрок $(\text{Sub}(\mathcal{U}); \Delta, \cap; \emptyset, \mathcal{U})$.

3.6. Изучите системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в кольцах $(\text{Sub}(\mathcal{U}); \Delta, \cap; \emptyset, \mathcal{U})$.

3.7* (Сведение уравнений 4-й степени к кубическим). Пусть элементы кольца $x_1, x_2, x_3, x_4, p, q, r, s \in R$ таковы, что

$$\forall x \in R [(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s].$$

Какие свойства кольца R позволяют утверждать, что в этом случае

$$\begin{aligned} \forall y \in R [(y - x_1x_2 - x_3x_4)(y - x_1x_3 - x_2x_4)(y - x_1x_4 - x_2x_3) = \\ = y^3 - qy^2 + (pr - 4s)y - p^2s + 4qs - r^2]? \end{aligned}$$

Примените полученный результат к решению нескольких уравнений 4-й степени.

4 октября, Г.Б. Шабат