

5

5.1. Приведите примеры категорий, в которых нет начальных объектов. Можно ли с их помощью построить категории, в которых нет конечных объектов?

5.2. Укажите начальные и конечные объекты в категориях  $MON, GRP, AB; RING, ANN$ . Введите категории *тел* и *полей* как *полные* подкатегории категорий  $RING$  и  $ANN$ ; есть ли в них начальные объекты?

5.3. В каких из категорий  $SET; MON, GRP, AB; RING, ANN$  определены прямые суммы? Прямые произведения?

5.4. Образуют ли *кольцо с композицией* рациональные функции с вещественными коэффициентами? Гладкие функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? Функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , где  $a_n \in \mathbb{R}$  и ряды *сходятся* при всех  $x \in \mathbb{R}$ ? Подразумеваются обычные определения сложения, умножения, дифференцирования и композиции функций.

5.5\*. Сформулируйте аксиомы тернара  $\mathbf{T}$  с операцией

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T} : (a, x, b) \mapsto \underline{ax + b},$$

достаточные для того, чтобы на *плоскости*  $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ , на которой *прямыми* будут названы графики отображений  $x \mapsto \underline{ax + b}$  и *вертикальные прямые*  $\{(x, y) \mid y \in \mathbf{T}\}$  для всех  $x \in \mathbf{T}$ , выполнялись (первая и пятая) аксиомы Евклида:

- *через любые две точки проходит прямая, причём единственная;*
- *через любую точку вне данной прямой проходит прямая, параллельная данной, причём единственная.*

Разумеется, *параллельными* называются непересекающиеся прямые. Проверьте, что, если  $\mathbf{T}$  – *тело* с операцией  $\underline{ax + b} := ax + b$ , то ваши аксиомы тернара выполняются.

5.6. Классифицируйте с точностью до изоморфизма группы из  $\leq 4$  элементов. Решена ли вами классификационная задача в категории  $AB$ ?

5.7. Представим ли забывающий функтор

$$\mathbf{forget} :: GRP \longrightarrow SET?$$

5.8\*. Представим ли забывающий функтор

$$\mathbf{forget} :: RING \longrightarrow SET?$$

18 октября, Г.Б. Шабат