Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

10

10.1. Какие операции над идеалами в $\mathbb{Z}$ соответствуют операциям НОК и НОД в полукольце $\mathbb{N}$?

10.2. Перечислите 4-элементные коммутативные кольца.

10.3. Докажите, что множество $\sqrt{0}$ нильпотентов любого коммутативного кольца (*нильрадикал*) является идеалом и совпадает с пересечением всех простых идеалов кольца.

10.4*. Рассмотрите последовательность *partitio numerorum*

$$\mathbf{p} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \#\{(k_1, k_2, \dots) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots \mid [k_1+k_2+\cdots = n]\wedge[k_1 \geq k_2 \geq \cdots > 0]\},$$

введите её *производящую функцию*

$$\mathcal{P}(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}(n)x^n$$

и осознайте тождество Эйлера

$$\mathcal{P}(x) := \prod_{d=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x^{dn} = (1 + x^1 + x^{1+1} + \dots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \dots)\dots.$$

Для $N = 1, 2, 3, \dots$ установите в кольцах $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^N)}$ равенства

$$\frac{1}{\mathcal{P}(x)} = \prod_{d=1}^{\infty}(1 - x^d)$$

Вычислите несколько правых частей этого равенства, угадайте закономерность и обоснуйте её. (**Замечание.** Ответ и набросок решения можно найти в задачнике Полиа и Сегё). Примените полученный результат к вычислению $\mathbf{p}(10)$, $\mathbf{p}(20)$ и $\mathbf{p}(30)$.

10.5*. Придайте алгебраический смысл тождеству Эйлера

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n = \prod_{d=0}^{\infty}(x^{-3^d} + 1 + x^{3^d})$$

и представьте с его помощью числа $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ в виде сумм и разностей неповторяющихся натуральных степеней тройки.

10.6. При каких $m, n \in \mathbb{Z}$ имеет место изоморфизм колец $\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$?

10.7. Исследуйте уравнение $x^2 = x$ в кольцах $\frac{\mathbb{Z}}{10^n\mathbb{Z}}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$.

10.8. Определяет ли процедура построения поля частных *функтор* из категории целостных колец в категорию полей?

10.9. Докажите, что для любого простого идеала коммутативного кольца $\mathfrak{p} \in \mathbf{spec}(R)$ имеет место изоморфизм полей $\mathrm{ff}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) \cong \frac{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}_\mathfrak{p}}$.

10.10. Представим ли *функтор точек*, определённый системой полиномиальных уравнений?

22 ноября, *Г.Б. Шабат*