# Алгебраические подмножества vs идеалы

Поле k в этом листке предполагается алгебраически замкнутым.

Определим на алгебраическом многообразии $X$ топологию Зарисского: назовём подмножество $Z \subset X$ *замкнутым*, если оно алгебраическое (т.е. является множеством нулей некоторого семейства регулярных на $X$ функций).

**Задача 1.** Проверьте, что получается топология на $X$.

Для любой функции $f \in \mathrm{k}[X]$ определим открытое множество $D_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Такие открытые множества называются *главными*.

**Задача 2.** Проверьте, что множества $D_f$ образуют базис топологии Зарисского: любое открытое множество есть объединение нескольких главных открытых множеств.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ — алгебраические подмножества, а $\phi\colon X \to Y$ — отображение.

**Задача 3.** Покажите, что $\phi$ регулярно $\iff$ для любой функции $f \in \mathrm{k}[Y]$ имеем $f \circ \phi \in \mathrm{k}[X]$.

**Задача 4.** a) Покажите, что $\phi^*$ инъективно $\iff \overline{\operatorname{im}\phi} = Y$.

b) Покажите, что $\phi^*$ сюръективно $\iff \phi$ есть изоморфизм $X$ на $\phi(X)$.

Приведите примеры, когда

c) $\phi^*$ инъективно, но $\phi$ не сюръективно;

d) $\phi^*$ не сюръективно, но $\phi$ инъективно.

**Задача 5.** Установите биекцию между вложениями алгебраического многообразия $X$ в аффинное пространство и системами образующих алгебры $\mathrm{k}[X]$.

Для идеала $I$ в $\mathrm{k}[X]$ обозначим соответствующее алгебраическое подмножество в $X$ через $V(I)$. Для подмножества $Z$ в $X$ обозначим соответствующий идеал в $\mathrm{k}[X]$ через $I(Z)$.

**Задача 6.** a) Проверьте, что для произвольного подмножества $Z \subset X$ имеем $V(I(Z)) = \overline{Z}$, где $\overline{Z}$ обозначает замыкание $Z$ в топологии Зарисского.

b) Покажите, что соответствие $Z \mapsto I(Z)$ определяет вложение множества алгебраических подмножеств в $X$ в множество идеалов $\mathrm{k}[X]$. Каков его образ? Проверьте, что

c) $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$; $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.

d) $I(Z_1 \cup Z_2) = I(Z_1) \cap I(Z_2)$; $I(Z_1 \cap Z_2) \supset I(Z_1) + I(Z_2)$.

Пусть $s\colon A \to B$ — гомоморфизм коммутативных колец. Для идеала $J \subset B$ определим его сужение $J^c$ как $s^{-1}(J)$, это идеал в $A$. Для идеала $I \subset A$ определим его расширение $I^e$ как идеал в $B$, порождённый $s(I)$.

**Задача 7.** Проверьте, что a) $I^{ec} \supset I$, $J^{ce} \subset J$,

b) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$; $(I_1 \cap I_2)^e \subset I_1^e \cap I_2^e$;

c) $(J_1 + J_2)^c \supset J_1^c + J_2^c$; $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$.

Пусть $\phi\colon X \to Y$ — регулярное отображение, $Z \subset X$ и $W \subset Y$ — алгебраические подмн-ва.

**Задача 8.** a) Покажите, что $I(\overline{\phi(Z)}) = (I(Z))^c$.

b) Пусть при этом $Z$ неприводимо. Покажите, что и $\overline{\phi(Z)}$ неприводимо.

c) Покажите, что подмножество $\phi^{-1}(W) \subset X$ алгебраическое и $I(\phi^{-1}(W)) = (I(W))^e$.

**Задача 9.** Покажите, что алгебраическое многообразие $X$ несвязно в топологии Зарисского $\iff$ алгебра $\mathrm{k}[X]$ раскладывается в прямое произведение двух других алгебр.

**Задача 10*.** Определите прямое произведение алгебраических многообразий и покажите, что

$$\mathrm{k}[X \times Y] \cong \mathrm{k}[X] \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[Y].$$