НМУ 7 ноября 2018
Алгебра 3 Листок 8

Категория модулей над кольцом

Пусть $X_i, i \in I$ – некоторое множество объектов категории. *Произведением* X_i называется объект $\prod_i X_i$, представляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i)$. *Копроизведением* X_i называется объект $\coprod_i X_i$, копредставляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -)$. Имеем

$$\mathrm{Hom}(-, \prod_i X_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(\coprod_i X_i, -) \cong \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -).$$

По лемме Йонеды произведение и копроизведение определены однозначно, если существуют.
Задача 1. Опишите (для двух сомножителей) произведение и копроизведение в категории a) множеств; b°) модулей над кольцом A; c) коммутативных колец; d) частично упорядоченных множеств; e) где объекты – элементы линейно упорядоченного множества X, из x в y есть единственный морфизм, если $x \leqslant y$; где объекты – натуральные числа, из m в n есть единственный морфизм, если $m|n$.
Под модулями в этом листке имеются в виду левые модули над некоторым ассоциативным кольцом с единицей A. Категорию левых модулей над кольцом A обозначим $A-\mathrm{mod}$.
Задача 2. Пусть $f\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Дайте определения ядра и коядра f через a) начальный/конечный объект некоторой категории; b) сопряжённые функторы.
Задача 3. Пусть $A \to B$ – гомоморфизм колец. Докажите, что левым сопряжённым к функтору забывания $B-\mathrm{mod} \to A-\mathrm{mod}$ будет функтор расширения скаляров $M \mapsto B \otimes_A M$, а правым сопряжённым – функтор $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M)$.
Задача 4. Пусть A – коммутативное кольцо, $S \subset A$ – подкольцо, M – A-модуль. Проверьте, что правым сопряжённым к функтору $M \otimes_A -$ из A-модулей в S-модули будет функтор $\mathrm{Hom}_S(M, -)$.

Модуль P называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма модулей $s\colon M \to N$ и любого гомоморфизма $f\colon P \to N$ найдётся гомоморфизм $f'\colon P \to M$ такой, что $sf' = f$. Двойственно, модуль I называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $t\colon M \to N$ и любого гомоморфизма $g\colon M \to I$ найдётся гомоморфизм $g'\colon N \to I$ такой, что $g't = g$.
Задача 5. a) Покажите, что модуль $\oplus P_i$ проективен $\iff$ каждый из модулей P_i проективен.
b) Покажите, что модуль $\prod I_i$ инъективен $\iff$ каждый из модулей I_i инъективен.
Задача 6. a) Покажите, что свободный модуль $\oplus_{t \in T} A$ любого ранга проективен.
b°) Покажите, что любой проективный модуль является прямым слагаемым свободного.
c°) Приведите пример проективного, но не свободного модуля.
Подсказка: возьмите кольцо $M_n(\mathbb{R})$ или $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Задача 7*. Докажите критерий инъективности Бэра: A-модуль I инъективен $\iff$ для любого левого идеала $J \subset A$ любой гомоморфизм $f\colon J \to I$ продолжается до гомоморфизма $A \to I$.
Подсказка: воспользуйтесь леммой Цорна и продолжайте гомоморфизм постепенно.
Задача 8. a) Докажите, что модуль M над кольцом главных идеалов без делителей нуля A инъективен $\iff$ он делим, т.е. для любых $m \in M$ и $a \in A$, $a \neq 0$, найдётся $y \in M$ такой, что $x = ay$.
b) Покажите, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективные $\mathbb{Z}$-модули.
Задача 9. a°) Покажите, что для любого A-модуля M имеется накрытие проективным модулем $\oplus_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M)} A \to M$.
b) Покажите, что для любого A-модуля M имеется вложение в инъективный модуль
$M \to \prod_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.