

## Листок 1.

Задача 1. Пусть  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  – кривая на плоскости, заданная непрерывно дифференцируемыми функциями  $x(t)$ ,  $y(t)$ , где  $t \in [0, 1]$ . Прямая  $l$ , пересекающая кривую  $\gamma$  называется трансверсалью, если во всех точках пересечения вектор скорости  $\dot{\gamma}$  отличен от нуля и не параллелен  $l$ . Докажите, что множество точек пересечения кривой  $\gamma$  с прямой  $l$  конечно.

Задача 2. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывно дифференцируемое отображение, причем матрица Якоби  $f'(a)$  невырождена в каждой точке  $a$ .

(а) Докажите, что для всякого открытого множества  $U$  его образ  $f(U)$  является открытым множеством.

(б) Верно ли, что  $f$  является инъекцией?

Задача 3. Докажите, что открытый круг, открытый квадрат, вся плоскость и открытый треугольник\* попарно диффеоморфны.

Задача 4. Пусть группа  $G$  с операцией  $\circ$  является метрическим пространством и отображения  $(a, b) \rightarrow a \circ b$  и  $a \rightarrow a^{-1}$  непрерывны. Докажите, что компонента линейной связности, содержащая единицу, является подгруппой, а остальные компоненты линейной связности являются смежными классами по этой подгруппе.

Задача 5. Проверьте являются ли связными и в случае отрицательного ответа опишите все компоненты связности для следующих групп: (а)  $GL_n$  – группа невырожденных линейных преобразований  $\mathbb{R}^n$ , (б)  $SL_n$  – группа невырожденных линейных преобразований  $\mathbb{R}^n$  с единичным определителем, (с)  $O_n$  – группа невырожденных линейных преобразований  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих скалярное произведение.

Задача 6. Выпишите уравнение  $F(x, y, z) = 0$ , задающее тор:

$$x(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \cos \varphi, \quad y(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \sin \varphi, \quad z(\varphi, \psi) = r \sin \psi, \quad 0 < r < R.$$

Напишите уравнение касательной плоскости к тору.

Задача 7. Докажите, что  $SL_n$  и  $O_n$  являются гладкими подмногообразиями в  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Найдите их размерность. Опишите их касательные пространства в единице.