НМУ, II курс, 24.09.2018

Листок 2.

Задача 1. Напишите формулы стереографической проекции единичной сферы с центром в нуле из точки $(0, 0, 1)$ (Северный полюс) на плоскость, касающуюся сферы в точке $(0, 0, -1)$ (Южный полюс). Докажите, что экваторы переходят в окружности или прямые, причем в прямые переходят только экваторы, проходящие через Северный полюс.

Задача 2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение, причем $f \circ f = f$. Докажите, что $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Какой характеристикой f определяется размерность этой поверхности?

Задача 3. Пусть $f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$. Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (1/3, 1/3)$, $p = (-1/3, -1/3)$ множество $f^{-1}(f(p))$ является вложенным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. Докажите, что одномерное гладкое связное многообразие диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$ или окружности S^1.

Задача 5. Докажите, что гладкое компактное многообразие размерности n нельзя вложить $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. Рассмотрим множество $G(k, n)$ k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^n$. Такие векторы образуют открытое множество в $\mathbb{R}^{nk}$. Введем отношение эквивалентности: два набора линейно независимых векторов эквивалентны, если порождают одно и тоже k-мерное подпространство. Топология на $G(k, n)$ – топология факторпространства. Докажите, что (a) $G(k, n)$ – хаусдорфово пространство, (b) $G(k, n)$ – гладкое многообразие размерности $k(n - k)$. Многообразие $G(k, n)$ называется многообразием Грассмана.

Задача 7. Докажите, что сопоставление пространству его ортогонального дополнения задает диффеоморфизм многообразий $G(k, n)$ и $G(n - k, n)$.