НМУ, II курс, 08.10.2018

Листок 3.

Задача 1. Докажите, что касательное расслоение сферы S^2 гомеоморфно множеству в $\mathbb{C}^3$, определяемому равенством $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$.

Задача 2. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – бесконечно дифференцируемое отображение. Докажите, что для почти всякого линейного отображения $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (мы отождествляем пространство линейных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$ с $\mathbb{R}^3$) отображение $f + L$ является погружением. Можно ли заменить бесконечную дифференцируемость более слабым требованием, что первая производная является непрерывной?

Задача 3. Пусть $M = \{(z, w)\colon w^2 = z(z-1)\}$.

(a) Докажите, что множество $M \setminus \{(0,0),(1,0)\}$ является гладкой связной двумерной поверхностью в $\mathbb{R}^4$.

(b) Докажите, что множества $\{(z,w) \in M\colon 0 < |z| < 1\}$ и $\{(z,w) \in M\colon 0 < |z-1| < 1/2\}$ гомеоморфны кругу с выколотым центром $\{z\colon 0 < |z| < 1\}$.

(c) Опишите как устроена поверхность M в окрестности бесконечности, например при $|z| > 2$.

(d) Компактифицируйте M, добавив точки, соответствующие $z = 0, 1, \infty$. Компактификацию обозначим через M'.

(e) Докажите, что $M' \setminus \{(z,w)\colon z = t \in [0,1]\}$ является объединением двух непересекающихся множеств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{C}$.

(f) Докажите, что M' гомеоморфно сфере S^2.

Задача 4. Найдите объем области в $\mathbb{R}^3$, являющейся пересечением двух цилиндров: $x^2 + y^2 \le 1$ и $x^2 + z^2 \le 1$.

Задача 5. Прямоугольник разбили на конечное число прямоугольников меньшего размера, стороны которых параллельны сторонам исходного прямоугольника. Известно, что у каждого из прямоугольников разбиения хотя бы одна сторона имеет рациональную длину. Докажите, что у исходного прямоугольника хотя бы одна из сторон имеет рациональную длину.

Задача 6. Постройте такое подмножество единичного квадрата, что пересечение его с любой вертикалью и любой горизонталью состоит из не более чем одной точки, но его замыкание совпадает с квадратом.

Задача 7. Пусть $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и $u = 0$ вне некоторого шара. Докажите равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \det D^2 u \, dx = 0.$$