НМУ, II курс, 15.10.2018

Листок 4.

Задача 1. Пусть $\mathbb{T}^2$ – тор, полученный вращением окружности вокруг оси OZ. Докажите, что функции x, y и z являются гладкими функциями на $\mathbb{T}^2$.

Задача 2. Пусть M – гладкое компактное многообразие и $f\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что существует такое вложение M в $\mathbb{R}^N$, при котором f оказывается ограничением какой-то координаты на M.

Задача 3. Докажите, что гладкое компактное многообразие M с краем можно так вложить в полупространство $x_{N+1} \geq 0$ пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, что ∂M будет лежать в гиперплоскости $x_{N+1} = 0$.

Задача 4. Приведите пример гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с несчетным множеством критических значений.

Задача 5. Найдите интеграл по кубу $[0,1]^n$ от функций

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{и} \quad \min\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Задача 6. При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите соболевскую производную или докажите, что ее нет, для функции $|x|^\alpha$ на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$.

Задача 7. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция на единичном кубе $I = [0,1]^n$. Пусть

$$\Psi(x,s) = (x, f(x)) + s\frac{(-f'(x), 1)}{\sqrt{1 + |f'(x)|^2}}$$

Каков геометрический смысл множества $Q_t = \Psi(I \times [0,t])$? Вычислите предел

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}|Q_t|.$$