Листок 6.

Задача 1. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2\sin x)\partial_x, \quad (\sin^2 x)\partial_x, \quad (\sin 2x)\partial_x?$$

Задача 2. Найдите все диффеоморфизмы $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющие векторное поле

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i}.$$

Задача 3. Удалим из единичной сферы S^2, заданной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, полюса $(0, 0, \pm 1)$. Пусть X – векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к меридианам в направлении с севера на юг, а Y – векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к параллелям в направлении с запада на восток. Запишите X и Y в локальных координатах (широта, долгота) и найдите коммутатор $[X, Y]$.

Задача 4. Найдите все векторные поля на $\mathbb{R}^n$, коммутирующие с векторным полем (a) ∂_{x_1}, (b) $\partial_{x_1} + \ldots + \partial_{x_n}$.

Задача 5. Выпрямите в окрестности нуля векторное поле (a) $x_1\partial_{x_1} + (1 + x_2)\partial_{x_2}$, (b) $(x_1 - x_2)\partial_{x_1} + (x_1 + x_2 + 1)\partial_{x_2}$.

Задача 6. Опишите векторные поля на $\mathbb{R}^n$, фазовые потоки которых сохраняют (a) расстояние, (b) объем. Докажите, что такие векторные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора.

Задача 7. Постройте на сфере S^{2n+1} векторное поле, которое нигде не обращается в нуль.