НМУ, II курс, 26.11.2018

Листок 7.

Задача 1. Пусть v, u – гладкие векторные поля и ω – дифференциальная 1 форма. Докажите равенство:

$$d\omega(v,u) = v(\omega(u)) - u(\omega(v)) - \omega([v,u]).$$

Задача 2.

(a) Пусть фазовый поток g_t порожден векторным полем $H_y\partial_x - H_x\partial_y$ на плоскости. Докажите, что $g_t^* dx \wedge dy = dx \wedge dy$.

(b) Пусть g_t – семейство гладких отображений многообразия M в многообразие N, причем $g_t(z)$ гладко зависит от (t,z), $\frac{d}{dt}g_t(z) = X(t, g_t(z)) \in TN_{g_t(z)}$ и ω – дифференциальная k форма. Докажите, что

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t^*\omega = d(g_t^*(i_X\omega)) + g_t^*(i_X d\omega),$$

где $i_X\omega(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = \omega(X,\xi_1,\dots,\xi_{k-1})$.

Задача 3. (Лемма Пуанкаре) Используя предыдущую задачу докажите, что на стягиваемом многообразии (M – стягиваемое многообразие, если существует гладкое отображение $g\colon M\times[0,1]\to M$ такое, что $g(x,1)=x$ и $g(x,0)=x_0$ для некоторого $x_0\in M$) всякая замкнутая форма ω (т.е. $d\omega = 0$) является точной, т.е. $\omega = d\alpha$.

Задача 4. На $\mathbb{R}^3$ задана форма $\omega = dx\wedge dy + dy\wedge dz + dz\wedge dx$. Найдите какую-нибудь форму α, для которой $\omega = d\alpha$.

Задача 5. Пусть ω – дифференциальная k-форма на $\mathbb{R}^n$ и $\xi_1,\dots,\xi_{k+1}$ – вектора, отложенные от точки x. Обозначим через $\Pi_\varepsilon = \Pi(\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_{k+1})$ параллелепипед, натянутый на вектора $\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_{k+1}$. Докажите, что

$$d\omega(\xi_1,\dots,\xi_{k+1}) = \frac{1}{\varepsilon^{k+1}}\int_{\partial\Pi_\varepsilon}\omega.$$

Задача 6. Используя равенство из задачи 1 как определение $d\omega$ докажите теорему Стокса для параллелепипеда.

Задача 7. Вычислите

$$\int_S (x+z)\,dx\wedge dy + (z+y+\cos x)\,dy\wedge dz + (x-\sin y)\,dz\wedge dx,$$

где S – поверхность пирамиды, отсекаемой плоскостью $x+y+z=1$ от $x,y,z\geq 0$, причем из грани, лежащей на плоскости OXY вырезали четверть круга

$x^2+y^2\leq 1/\sqrt{2}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.