Метрические пространства

1◇1. Проверьте являются ли следующие функции метриками на $\mathbb{R}^n$:
а) $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|x^i - y^i\right|$; **б)** $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i - y^i\right)^2$;
в) $\rho(x,y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|x^i - y^i\right|$; **г)** $\rho(x,y) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|x^i - y^i\right|$.

1◇2. Пусть S_+ — верхняя полусфера радиуса 1 в трёхмерном евклидовом пространстве. Для всяких $u, v \in S$ положим $f(u,v)$ равным (евклидовой) длине наименьшей из дуг большого круга, проходящего через u, v. На диске D радиуса 1, являющимся экваториальным сечением полусферы S_+ положим $\rho(x,y) = f(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, где $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ ортогональные проекции с диска на полусферу точек x и y. В полярных координатах на диске найдите явный вид функции $\rho(x,y)$ и проверьте, является ли она метрикой.

1◇3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ положим $\rho(x,y)$ равным наименьшему целому числу, большему или равному евклидову расстоянию между x и y. Будет ли ρ метрикой?

1◇4. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ положим $\rho(x,y) = 10^{-k}$, где k равно количеству совпадающих последних цифр в числах x и y, и $\rho(x,x) = 0$. Будет ли $\rho(x,y)$ метрикой?

1◇5. При каких условиях на функцию $f(x)$ функция $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ будет метрикой на $\mathbb{R}^n$? Постройте такую функцию на $\mathbb{R}^2$.

1◇6. Покажите, что если $\rho(x,y)$ метрика, то $\widetilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ является метрикой, топологически эквивалентной $\rho(x,y)$.

1◇7. Покажите, что на множестве многочленов степени n с вещественными коэффициентами метрики $\rho_1(x,y) = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|x(t) - y(t)\right|$ и $\rho_2(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} |x_i - y_i|$ топологически эквивалентны.

1◇8. Верно ли что в произвольном метрическом пространстве (X,ρ) из $\rho(x,y) < 2$ следует что $B_1(x) \cap B_1(y) \neq \emptyset$?

1◇9. Постройте пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса строго содержится в шаре меньшего радиуса.

1◇10. Покажите, что если $\mathscr{F}$ совокупность всех открытых подмножеств метрического пространства (X,ρ), то **а)** пустое множество $\emptyset$ и само X принадлежат $\mathscr{F}$;
б) пересечение всяких двух элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$;
в) объединение любого числа элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$.

▷ Свойства выше означают, что открытые множества определяемые в терминах метрики задают на метрическом пространстве топологию.

1◇11. Является ли $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\right\}$ открытым множеством в евклидовом $\mathbb{R}^2$?

1◇12. Является ли $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < x^2 - y^2\right\}$ открытым множеством в евклидовом $\mathbb{R}^2$?