Вещественные числа

4◇1. Покажите, что если для всяких элементов $a \in A, b \in B$ подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ выполняется $a \leqslant b$, то существует такое $x \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant x \leqslant b$ $\forall a \in A, b \in B$.

4◇2. Докажите, что верхняя грань всякого ограниченного множества содержится в его замыкании.

4◇3. Покажите, что для всякого замкнутого подмножества $M \subset \mathbb{R}$ существует последовательность, множество предельных точек которой совпадает с M.

4◇4. Верно ли, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда множество её элементов имеет единственную предельную точку и не имеет бесконечного подможества дискретных точек?

4◇5. Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает, ограничена и как следствие сходится.

▷ Предел этой последовательности называется *числом Эйлера* и обозначается e.

4◇6. Покажите, что сходимость последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ к числу A влечёт сходимость последовательности средних $A_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ к тому же числу A.

4◇7. Найдите замыкание в $\mathbb{R}$ множества $M = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

4◇8. Пусть последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ таковы, что $a_i \leqslant b_i \leqslant c_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, и последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеют одинаковые пределы. Тогда последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к тому же пределу.

4◇9. Покажите что всякая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ имеет предельную точку.

4◇10. Является ли множества, состоящие из чисел отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых цифра 1 встречается **а)** конечное число раз; **б)** бесконечное число раз, **в)** ни разу открытыми либо замкнутыми в $\mathbb{R}$?