Непрерывные функции на отрезке

7◇1. Проверьте на поточечную и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ на $\mathbb{R}$.

7◇2. Исследуйте последовательность $f_n(x) = \frac{1}{1+\varphi^2(x)} + \dots + \frac{1}{n^2+\varphi^2(x)}$ на поточечную и равномерную сходимость для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$ на метрическом пространстве X.

7◇3. Покажите, что если последовательность непрерывных на $[0,1]$ функций $f_n(x)$, таких что последовательность чисел $f_n(y)$ монотонно не убывает при всяком $y \in [0,1]$, сходится поточечно к непрерывному пределу $f(x)$, то эта сходимость равномерна.

7◇4. Приведите пример поточечной сходимости последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций к непрерывному пределу не являющейся равномерной сходимостью.

7◇5. Покажите, что если последовательность непрерывных на метрическом пространстве X функций $f_n(x)$ сходится равномерно к пределу $f(x)$ и для предельной точки a множества X при любом k существует предел $\lim_{x\to a} f_k(x)$, то для предельной функции тоже существует предел и выполняется

$$\lim_{i\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_i(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{i\to\infty} f_i(x)\right)$$

7◇6. Исследуйте отображение $f(x) \mapsto f^2(x) + f(x) - 1$ пространства непрерывных на $[0,1]$ функций с метрикой максимума модуля в себя на непрерывность и равномерную непрерывность.

7◇7. Покажите что пространство непрерывных на отрезке функций с метрикой максимума модуля разности сепарабельно, то есть, имеет счётное всюду плотное подмножество.

7◇8. Сепарабельно ли пространство ℓ_∞ (см. листок 5)?

7◇9. Найдите многочлен $p(x)$ наилучшим, в смысле максимума модуля разности, образом приближающий функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1,1]$, где $p(x)$ имеет вид **а)** ax^2; **б)** $ax^2 + c$; **в)** $ax^2 + bx + c$.