Лекция 1: $U(\mathfrak{sl}(2))$ и категория $\mathcal{O}$ для $\mathfrak{sl}(2)$

В этой лекции определяется алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$ обсуждается теория представлений, двусторонние идеалы $U(\mathfrak{sl}(2))$. Вводится категория $\mathcal{O}$ для $U(\mathfrak{sl}(2))$, иллюстрируется её связь с двусторонними идеалами $U(\mathfrak{sl}(2))$. Даётся описание этой категории $\mathcal{O}$. Доказательств почти нет...

1.1. **Определение** $U(\mathfrak{sl}(2))$**.** Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ (над $\mathbb{C}$) это трёхмерное векторное пространство, натянутое на вектора e, h, f и билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$, определённой соотношениями

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ может быть определена так же как операция коммутирования на матрицах 2 на 2 со следом 0; e, h, f при этом могут быть отождествлены со следующими матрицами:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представления (модули) алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ совпадают с представлениями (модулями) универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$, заданной как фактор свободной алгебры, порождённой символами e, h, f, по соотношениям

$$he - eh = 2e, \quad hf - fh = -2f, ef - fe = h.$$

1.2. **Представления** $U(\mathfrak{sl}(2))$**.** Простые модули алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$, а так же модули конечной длины $U(\mathfrak{sl}(2))$ могут быть описаны как модули на алгеброй Вейля $\mathbb{C}[x, \partial_x]$, см. [Blo]. Описание модулей этой алгебры в каком-то смысле дано там же [Blo], а так же в [Ka] (у Блока ответ попроще, но понимания того, каковы будут свойства у соответствующих диффуров он не даёт; у Кашивары ответ сильно сложнее, но он описывает многие свойства соответствующих диффуров).

Для алгебр Ли ранга 2 и выше ничего похожего по полноте на ответы Блока и Кашивары мне не известно. Вроде, соответствующую задачу описания всех модулей сразу принято считать дикой. С другой стороны, оказывается, что двусторонние идеалы алгебр $U(\mathfrak{g})$ поддаются точному описанию по крайней мере для конечномерных алгебр Ли (и это во многом предмет этого курса). Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то аннуляторы простых модулей для алгебры $U(\mathfrak{g})$ имеют самое непосредственное отношение к категории $\mathcal{O}$ — и об этом тоже пойдёт речь позже в курсе.

1.3. **Двусторонние идеалы алгебры** $U(\mathfrak{sl}(2))$**.** Двусторонние идеалы алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$ допускают описание, близкое к одному из описаний идеалов кольца целых чисел $\mathbb{Z}$. Нетривиальные идеалы в $\mathbb{Z}$ могут быть описаны, как $n\mathbb{Z}$ для произвольных чисел $n \in \mathbb{Z}$. Такой идеал называется простым, если число $|n|$ простое или единица. Верны следующие утверждения:

1. Всякий нетривиальный идеал в $\mathbb{Z}$ есть произведение простых идеалов.
2. Это произведение единственно с точностью до перестановки множителей.

Оказывается, что аналоги утверждений 1, 2 верны и для $U(\mathfrak{sl}(2))$. Чтобы утверждение 1 имело смысл нужно определить понятие простого идеала для некоммутативной алгебры.

Определение 1. Идеал $I \subset U(\mathfrak{sl}(2))$ называется *простым*, если для любых двух идеалов I_1, I_2 следующие условие эквивалентны:
- $I_1 \subset I$ или $I_2 \subset I$,
- $I_1 I_2 \subset I$.

Отмечу, что определение простого идеала отлично от определения простого идеала, используемого в коммутативной алгебре. Перейдём теперь к описанию простых идеалов $U(\mathfrak{sl}(2))$. Положим

$$z := h^2 + 2(ef + fe).$$

Легко видеть, что

$$[e, z] = -2he - 2eh + 2(eh + he) = 0, \quad [h, z] = 2(2ef - 2ef + 2fe - 2fe) = 0, \quad [f, z] = 2hf + 2fh + 2(-fh - hf) = 0.$$

Т.е. z — это элемент центра алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Оказывается, что любой элемент центра есть многочлен от z. Любой идеал вида $(z - \lambda)U(\mathfrak{sl}(2))$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ является простым в $U(\mathfrak{sl}(2))$.

Ещё одна серия простых идеалов возникает из конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Сопоставим тройке e, h, f дифференциальные операторы по следующему правилу:

$$e \to x\partial_y, h \to x\partial_x - y\partial_y, f \to y\partial_x, \ z \to (x\partial_x + y\partial_y)^2 + 2(x\partial_x + y\partial_y).$$

Вся алгебра дифференциальных операторов от x, y (а, следовательно, и $\mathfrak{sl}(2)$) действует на $\mathbb{C}[x, y]$. Легко видеть, что действие $\mathfrak{sl}(2)$ сохраняет степени однородных многочленов, т.е. что однородные многочлены степени n от x, y являются $\mathfrak{sl}(2)$-подмодулем в $\mathbb{C}[x, y]$. Мы обозначим этот подмодуль $V(n)$ (проверьте, что $\dim V(n) = n + 1$). Аннулятор $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} V(n)$ является простым идеалом в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

Лемма 1. Любой нетривиальный простой идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ относится к одному из двух классов идеалов:

1. $(z - \lambda)\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2)), \lambda \in \mathbb{C}$,
2. $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} V(n), n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Все идеалы первого класса попарно различны и имеют бесконечную коразмерность в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$. Все идеалы второго класса попарно различны и имеют конечную коразмерность в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

Доказательство. Первая задача в экзамене по курсу. Предполагается, что дальнейшие лекции помогут её решить. □

1.4. **Категория $\mathcal{O}$ для** $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$**.** Категория $\mathcal{O}$ была введена для описания двусторонних идеалов в универсальных обёртывающих полупростых алгебр Ли. Я считаю, что здесь есть три ключевых утверждения:

1. Теорема Дюфло о примитивных идеалах [Du], см. также [Gi].
2. Теорема Джозефа об эквивалентности решётки подмодулей модуля Верма решётке идеалов, см. [BG, Теорема 4.3].
3. Теорема Берштейна-Гельфанда-Гельфанда об эквивалентности блоков категории $\mathcal{O}$ блокам категории модулей Хариш-Чандры [BG, Теорема 5.9].

В этой лекции я хочу пояснить что есть 1 и 2 для $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$, а 3 будет обсуждаться позднее. Начнём с описания объектов категории $\mathcal{O}$.

Определение 2. $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модуль M принадлежит категории $\mathcal{O}$, если выполнены следующие условия

- M конечно порождён как $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модуль;
- действие h на M полупросто, т.е. $M = \oplus_{\nu \in \mathbb{C}} M_\nu$ и $h m_\nu = \nu m_\nu$ для всех $m_\nu \in M_\nu$;
- действие e на M локально нильпотентно, т.е. $\forall m \in M \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : e^k m = 0$.

Морфизмы в категории $\mathcal{O}$ совпадают с морфизмами в категории $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модулей. Важно, что не все расширения $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модулей из категории $\mathcal{O}$ принадлежат категории $\mathcal{O}$.

Лемма 2. Для всякого модуля M из категории $\mathcal{O}$ существует многочлен $p(z) \neq 0$ от z, для которого $p(z)M = 0$.

Следствие 1. Для всякого модуля M из категории $\mathcal{O}$ существует (примарное) разложение

$$M = \oplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_\lambda$$

и набор положительных чисел $n_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$, такие что:

- лишь конечное число $M\lambda \neq 0$,
- $(z - \lambda)^{n_\lambda} M_\lambda = 0$ для всех λ.

Следствие 2. Категория $\mathcal{O}$ распадается в прямую сумму

$$\mathcal{O} = \oplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{O}(\lambda),$$

где каждое $\mathcal{O}(\lambda)$ это подкатегория категории $\mathcal{O}$, для которой

$$\forall M \in \mathcal{O}(\lambda) \forall n \gg 0((z - \lambda)^n)M = 0.$$

В каждоми блоке $\mathcal{O}(\lambda)$ лишь конечное число простых объектов и мы их сейчас опишем - а заодно и каждый из блоков и связанные с ними идеалы. Положим

$$M(\mu) := \mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))/(\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))e + \mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))(h - \mu)).$$

Легко проверить, что $M(\mu)$ есть объект категории $\mathcal{O}$; $M(\mu)$ называется *модулем Верма.*

Лемма 3. Пусть $\lambda \neq n(n + 2)$ ни для какого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

- $\mathcal{O}(\lambda)$ полупроста и имеет ровно 2 простых объекта: $M(\mu_1), M(\mu_2)$, где μ_1, μ_2 — это корни уравнения $\mu(\mu + 2) = \lambda$.
- $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} M(\mu_1) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} M(\mu_2) = (z - \lambda)\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ — это максимальный идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

Лемма 4. Пусть $\lambda = -1(-1+2) = -1$. Тогда
- $\mathcal{O}(\lambda)$ полупроста и имеет ровно 1 простой объект: $M(-1)$.
- $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} M(-1) = (z+1)\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ — это максимальный идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

Лемма 5. Пусть $\lambda = n(n+2)$ для какого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда
- $\mathcal{O}(\lambda)$ неполупроста, имеет ровно 2 простых объекта: $V(n), M(-n-2)$; $\mathcal{O}(\lambda)$ эквивалентна категории представлений следующего колчана

$$\star \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\leftrightarrows}} \star$$

с соотношением $\alpha\beta = 0$.
- $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} M(-n-2) = (z-\lambda)\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$,
- $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} M(-n-2) \subsetneq \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} V(n)$; $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} V(n)$ — это максимальный идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

Из всего сказанного выше можно вывести следующие утверждения.

Следствие 3 (Теорема Дюфло для $\mathrm{U}(\mathfrak{sl})(2)$)**.** Пусть I — это аннулятор какого-то простого $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модуля. Тогда существует простой $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$-модуль L из категории $\mathcal{O}$, для которого $I = \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))} L$.

Следствие 4 (Теорема Джозефа для $\mathrm{U}(\mathfrak{sl})(2)$)**.** Фиксируем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$. Тогда отображения

$$I \to IM(\mu), M' \to \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))}(M(\mu)/M')$$

отождествляет подмодули M' модуля M с идеалами $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$, для которых $(z - \mu(\mu+2)) \in I$.

Список литературы

[Di] J. Dixmier, Algebres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[Blo] R. Block, *The irreducible representations of sl(2) and the Weyl algebra*, Advances in Mathematics, **39** 1981, p. 69-110.

[Ka] M. Kashiwara, *Riemann-Hilbert correspondence for irregular holonomic D-modules*, https://arxiv.org/abs/1512.07723.

[Du] M. Duflo, *Sur las classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple*, Ann. of Math. 105 (1977), 107–120.

[Gi] V. Ginzburg, *On primitive ideals*, https://arxiv.org/abs/math/0202079.

[BG] J. Bernstein, S. Gelfand, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras*, Comp. Mathematica **41**, 245–285 (1980).