Лекция 4, Часть 1: примитивные идеалы и радикал Джакобсона

Материал этой секции почти целиком изложен в [Dix].

Пусть A — это некоторая коммутативная ассоциативная алгебра с единицей. Идеалы в таких алгебрах — это широко изучаемый объект и основная мысль секции в том, чтобы указать как "перетащить" соответствующие понятия с коммутативных алгебр на некоммутативные. Мы начнём с краткого напоминания соответствующих определений.

Пусть $I \subset A$ — это некоторый идеал.

Определение 1. Идеал I называется

• *максимальным*, если он максимален по включению,

• *радикальным*, если $f^k \in I \implies f \in I$,

• *простым*, если $ab \in I \implies a \in I$ или $b \in I$.

Множество всех максимальных идеалов A обозначим $\mathrm{MSpec}A$. Это множество можно наделить топологией (Зариского), определив замкнутые множества по формуле

$$V(S) := \{m \in \mathrm{MSpec}A \mid m \supset S\}$$

для любого подмножества $S \subset A$. Каждому определённому выше замкнутому множеству можно сопоставить идеал

$$I(V(S)) := \cap_{m \in V(S)} m.$$

Легко проверить, что $V(S) = V(I(V(S)))$. Это позволяет отождествить замкнутые подмножества в топологии Зариского с идеалами I, для которых $I = I(V(I))$; мы будем называть такие идеалы *J-радикальными.*

Положим

$$\sqrt[a]{I} := \{f \in A \mid \exists k > 0 : f^k \in I\}, \quad \sqrt[b]{I} := \bigcap_{\substack{m \in \mathrm{MSpec}A, \\ m \supset I}} m.$$

Легко видеть, что $\sqrt[b]{I} = I(V(I))$. Хорошо известно, что $\sqrt[a]{I} = \sqrt[b]{I}$, если A конечно порождена. Но не для всех коммутативных алгебр с единицей это верно.

Пример 1. Пусть $A = \mathbb{C}[x, \frac{1}{x-\alpha}]_{\alpha \in \mathbb{C}\setminus 0}$, $I = (0)$. Тогда $\sqrt[a]{I} = (0)$, $\sqrt[b]{I} = (x)$.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1 (Лемма Нётер о разложении на примарные компоненты)**.** Пусть алгебра A нётерова. Тогда

• для любого радикального идеала I существует лишь конечное число минимальных по включению простых идеалов $p_1, ..., p_s$, содержащих I,

• $I = p_1 \cap ... \cap p_s$.

Иной способ думать об этом звучит так

всякое подмногообразие в топологии Зариского представимо в виде объединения конечного числа неприводимых подмногообразий; неприводимые подмногообразия соответствуют простым идеалам.

Некоммутативный случай. Теперь будем считать, что алгебра A — это ассоциативная некоммутативная алгебра с единицей. Для таких алгебр у понятия идеала появляется три версии — левые идеалы, правые идеалы, двухсторонние идеалы. Мы попытаемся обобщить понятия первой части лекции для класса двухсторонних идеалов.

Пример 2. Пусть A — это матрицы 2 на 2, а $I = (0)$. Тогда легко видеть, что I является максимальным двухсторонним идеалом в A; в то же время I не является ни простым, ни радикальным идеальным идеалом в смысле пословно заимствованного из коммутативного случая определения. Это должно намекнуть на то, что все эти определения для некоммутативного случая нуждаются в некоторой модификации...

Пусть $I \subset A$ — это некоторый двухсторонних идеал.

Определение 2. Идеал I называется

• *максимальным*, если он максимален по включению в классе двухсторнних идеалов,

• *радикальным*, если $J^k \subset I \implies J \subset I$ для любого двустороннего идеала $J \subset A$,

• *простым*, если $I_1 I_2 \subset I \implies I_1 \in I$ или $I_2 \in I$.

Как мы уже видели на множестве максимальных идеалов в коммутативном случае можно построить топологию и замкнутые множества в этой топологии соответствуют J-радикальным идеалам. В некоммутативном случае можно использовать дословно те же слова формулы для построения топологии на множестве максимальных идеалов, но при этом замкнутые подмножества биекции между простыми идеалами и замкнутыми подмножествами не будет.

Задача 1. Пусть $A = \mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2)) = \mathrm{U}(\{e, h, f\})$, а $I = (h^2+2(ef+fe)) = (z)$. Тогда идеал I прост (и, более того, прост в смысле "наивного" определения простого идеала). С другой стороны, есть единственный максимальный идеал, содержащий I — аугментирующий идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ (он имеет коразмерность 1 в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ и порождён элементами $\{e, h, f\}$). Соответственно, имеем $\sqrt{b}[I] = \{e, h, f\}$.

Оказывается, что можно добиться биекции между замкнутыми подмножествами некоторого топологического пространства и простыми идеалами (в разумных предположениях), но в качестве "точек" этой топологии надо использовать чуть-чуть другие объекты.

Определение 3. Двухсторонний идеал I в A называется *примитивным*, если $I = \mathrm{Ann}_A M$ для какого-то простого A-модуля M.

Множество примитивных идеалов алгебры A обозначается $\mathrm{Prim}A$.

Упражнение 1. Если алгебра A коммутативна, то $\mathrm{Prim}A = \mathrm{MSpec}A$.

Топология на множестве $\mathrm{Prim}A$ задаётся аналогично топологии на $\mathrm{MSpec}A$ в коммутативном случае. Для всякого двух стороннего идеала I в A положим

$$ {}^{a}\!\sqrt[+]{I} := \{f \in A \mid \forall g \in A \exists k > 0 : (gf)^k \in I\}, \qquad {}^{b}\!\sqrt[+]{I} := \bigcap_{\substack{m \in \mathrm{Prim}A, \\ m \supset I}} m; $$

${}^{a}\!\sqrt[+]{I}$, ${}^{b}\!\sqrt[+]{I}$ — это аналоги $\sqrt[a]{I}$, $\sqrt[b]{I}$ для некоммутативных алгебр, причём для ${}^{a}\!\sqrt[+]{I}$ даже не очевидно, что векторное подпространство в A.

Лемма 2. Пусть алгебра A определена над полем $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и

$$\dim A[t] < \mathrm{card}(\mathbb{F}),$$

то ${}^{a}\!\sqrt[+]{I} = {}^{b}\!\sqrt[+]{I}$ для любого двухстороннего идеала I.
(в наиболее интересном для нас примере основное поле равно $\mathbb{C}$, а алгебра A имеет счётную размерность над $\mathbb{C}$)

Мы докажем эту лемму чуть позднее, а пока сформулируем аналог леммы 1.

Лемма 3 (Лемма Нётер о разложении на примарные компоненты)**.** Пусть алгебра A нётерова слева. Тогда

• для любой радикального идеала I существует лишь конечное число минимальных по включению простых идеалов $p_1, ..., p_s$, содержащих I,

• $I = p_1 \cap ... \cap p_s$.

Доказательство леммы 2. Достаточно доказать два включения: ${}^{a}\!\sqrt[+]{I} \subset {}^{b}\!\sqrt[+]{I}$ и ${}^{b}\!\sqrt[+]{I} \subset {}^{a}\!\sqrt[+]{I}$.

Начнём со включения ${}^{a}\!\sqrt[+]{I} \subset {}^{b}\!\sqrt[+]{I}$. Рассмотрим $x \in {}^{a}\!\sqrt[+]{I}$ и докажем, что $x \in {}^{b}\!\sqrt[+]{I}$. Достаточно доказать, что аннулирует любой простой A/I-модуль. Предположим противное, т.е. что $xM \neq 0$ для какого-то простого A/I-модуля M. Тогда существует $m \in M \backslash 0$, для которого $xm \neq 0$. Так как модуль M прост, то существует $y \in A$, для которого $y(xm) = m$. По определению ${}^{a}\!\sqrt[+]{I}$, существует $n > 0$, для которого $(yx)^n = 0$. Имеем

$$0 = (yx)^n m = m.$$

Противоречие. Следовательно, $x \in {}^{b}\!\sqrt[+]{I}$.

Проверим теперь включение ${}^{b}\!\sqrt[+]{I} \subset {}^{a}\!\sqrt[+]{I}$. Для его докаательства достаточно докаать следующую лемму.

Лемма 4. В условиях леммы 2, если $x \in A$ не является нильпотентным элементом (т.е. если $x^n \neq 0$ для всех $n > 1$), то существует простой A-модуль M, $m \in M \backslash 0$, $\lambda \in \mathbb{F} \backslash 0$, для которых $\lambda x m = m$.

Ключевую роль в доказательстве леммы 4 будет играть следующая лемма.

Лемма 5 (Трюк Амицура, Аналог леммы Машке).
Пусть алгебра A определена над полем $\mathbb{F}$, $t \in \mathbb{F}$ — центральный элемент, а M — простой A-модуль. Если $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\dim A < \mathrm{card}(\mathbb{F})$, то
$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : (t-\lambda)M = 0.$$
(в наиболее интересном для нас примере основное поле равно $\mathbb{C}$, а алгебра A имеет счётную размерность над $\mathbb{C}$)

Доказательство. Для всякого $\lambda \in \mathbb{F}$, действия $(t-\lambda)$ на M коммутирует с действием A. Следовательно, ядро и образ $(t-\lambda)$ — это A-подмодули в M, т.е. они равны 0 или M.

Если ядро $(t-\lambda)$ равно M, то $(t-\lambda)M = 0$, что и требовалось. Следовательно, мы можем считать, что действие $(t-\lambda)$ не имеет ядра для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Если образ $(t-\lambda)$ равен 0, то $(t-\lambda)M = 0$, что и требовалось. Следовательно, мы можем считать, что образ действия $(t-\lambda)$ на M равен M для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Следовательно, мы можем считать, что $t-\lambda$ — это обратимый оператор для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Фиксируем $m \in M \backslash 0$ и рассмотрим множество векторов
$$\{\frac{1}{t-\lambda}m\}_{\lambda\in\mathbb{F}}. \tag{1}$$
Из того, что $\dim A < \mathrm{card}(\mathbb{F})$, следует что $\dim M < \mathrm{card}(\mathbb{F})$. Откуда следует что вектора (1) не могут быть линейно независимы. Рассмотрим линейную зависимость между этими векторами
$$\sum_{1\leq i\leq s} \frac{c_i}{t-\lambda_i} m = 0,$$
где мы считаем что $c_i \in \mathbb{F}\backslash 0, 1 \leq i \leq s$, а также что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $\leq i \neq j \leq s$. Отсюда следует, что $p(t)m = 0$, где
$$p(t) = \sum_{1\leq i\leq s} c_i \prod_{1\leq j\leq s, j\neq i} (t-\lambda_j).$$
Так как $p(\lambda_1) = c_1 \prod\limits_{2\leq j\leq s} (\lambda_1 - \lambda_j)$, то многочлен $p(\cdot)$ не равен 0. Следовательно, $p(x) = p_0(x-\mu_1)....(x-\mu_l)$, где $l \geq 1$ и $p_0 \neq 0$. Откуда $p_0(t-\mu_1)....(t-\mu_l)m = 0$. Но операторы $t-\mu$ обратимы для любого $\mu \in \mathbb{F}$. Противоречие. □

Доказательство леммы 4. Рассмотрим алгебру $A[t]$ и её левый идеал $A[t](1-tx)$. Одно из двух
$$1 \in A[t](1-tx), \quad 1 \notin A[t](1-tx).$$
Докажем, что в первом случае $\exists n > 0 : x^n = 0$, т.е. что первый случай противоречит условию. Если $1 \in A[t](1-tx)$, то существует
$$a = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n, \text{ где } a_1, ..., a_n \in A,$$
для которого $a(1-tx) = 1$. Отсюда следует, что
$$a_0 = 1, a_1 - a_0 x = 0, ..., a_n - a_{n-1}x = 0, a_n x = 0.$$
Из идущих выше равенств легко видеть, что $x^{n+1} = 0$.

Перейдём теперь ко второму случаю. По лемме Цорна существует максимальный левый идеал I в алгебре $A[t]$, содержащий $A[t](1-tx)$. Обозначим фактор $A[t]/I$ через M, а образ 1 в M через m. Из того, что $1-tx \in I$ имеем, что $m = txm$. Из леммы 5 следует, что существует $\lambda \in \mathbb{F}$, для которого $(t-\lambda)M = 0$. Что влечёт то, что $txm = \lambda xm$ и что M является простым A-модулем. Таким образом, (M, m, λ) — искомый набор данных. □

□

Лекция 4, Часть 2: примитивные идеалы и теорема Дюфло для $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$

В первой части обсуждалась роль примитивных идеалов в некоммутативных алгебрах. Во второй части мы обсудим явную классификацию примитивных идеалов для $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$. Идеи доказательство соответствующего классификационного результата будут обсуждаться в следующих лекциях, а полное рассуждение получается композицией статей [BJ, Jo1, Jo2], см. также [BoBry, BV1, BV2].

Для того, чтобы сформулировать результат, нам потребуется некоторое обобщение полустандартных таблиц Юнга из предыдущей лекции.

Определение 4. Пусть $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_s \geq 0$ — это некоторый набор целых положительных чисел. *Полустандартной $\mathbb{C}$-таблицей Юнга* называется таблица, длины столбцов в которой равны слева направо $\lambda_1, ..., \lambda_s$, заполненной комплексными числами так что

• разность любых двух чисел в таблице цела,
• числа во всех строках строго убывают ($a_i - a_j \in \mathbb{Z}_{<0}$ при $i > j$),
• числа во всех столбцах нестрого возрастают ($a_i - a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ при $i > j$).

Теорема 1. Примитивные идеалы $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$ отождествляются с неупорядоченными наборами полустандартных $\mathbb{C}$-таблиц Юнга, для которых

• разность чисел в разных таблицах всегда нецела,
• сумма всех чисел во всех таблицах равна 0.

Напомним, что имеет место отображение

$$\mathfrak{h}^* \to \mathrm{PrimU}(\mathfrak{g})\ (\lambda \to \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} L(\lambda))$$

для всякой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с фиксированных набором данных $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$. В $\mathfrak{h}$ для $\mathfrak{sl}(n)$ мы определили раньше базис $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$. Следовательно, имеют место отображения

$$\{\ \text{вектора } (\lambda_1, ..., \lambda_n)\ \} \leftrightarrow \lambda \in \mathfrak{h}^* \to \mathrm{PrimU}(\mathfrak{sl}(n)) \leftrightarrow \{\ \begin{matrix} \text{наборы полустандартных} \\ \mathbb{F}\text{-таблиц как выше} \end{matrix}\ \}.$$

Оставляя только первую и последнюю часть имеем отображение

$$\{\ \text{вектора } (\lambda_1, ..., \lambda_n)\ \} \to \{\ \begin{matrix} \text{наборы полустандартных} \\ \mathbb{F}\text{-таблиц как выше} \end{matrix}\ \}.$$

Естественно ожидать что это отображение будет иметь комбинаторную природу — и по факту оно является версией алгоритма Робинсона-Шенстеда, см. [RS, Knu]. Опишем явно эту версию.

1. Положим $\lambda_i^+ := \lambda_i - i - c$, $\lambda_n^+ := -n - c$, где $c = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}}{n} - \frac{n+1}{2}$.

2. Рассмотрим последовательность $\lambda_1^+, ..., \lambda_{n-1}^+, \lambda_n^+$.

3. Разобьём множество $\{1, ..., n\}$ на классы эквивалентности относительно отношения эквивалентности $i \sim j \iff \lambda_i^+ - \lambda_j^+ \in \mathbb{Z}$.

4. Каждый класс эквивалентности, определённый выше, задаст подпоследовательность последовательности $\lambda_1^+, ..., \lambda_{n-1}^+, \lambda_n^+$.

5. К каждой построенной выше подпоследовательности мы применим процедуру, которая сопоставит ему полустандартную $\mathbb{C}$-таблицу. Эта процедура (мы обозначим её RS) рекурсивна и определена для последовательностей произвольной длины. Рассмотрим последовательность из $s \geq 1$ элементов $\mu_1, ..., \mu_s$.

5.1. Последовательности из одного элемента ($s = 1$) сопоставляется таблица состоящая из одного этого элемента.

5.2. Если $s \geq 2$, то $RS(\mu_1, ..., \mu_s) = (\mu_s \to RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$, где $\cdot \to \cdot$ это процедура, добавления одного элемента в таблицу, которую мы сейчас определим.

5.3. Процедура подстановки:

5.3.1. Если μ_s строго меньше всех элементов первой строки $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$ ($a <_{\mathbb{Z}} b \iff a - b \in \mathbb{Z}_{<0}$), то $RS(\mu_1, ..., \mu_s)$ получается добавлением к $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$ числа μ_s в конец первой строки.

5.3.2. Пусть теперь μ_s больше или равно, чем какие-то элементы первой строки $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$ ($a <_{\mathbb{Z}} b \iff a - b \in \mathbb{Z}_{<0}$). Обозначим через l наименьший по номеру элемент первой строки, который меньше или равен μ_s. В этом случае первая строка $RS(\mu_1, ..., \mu_s)$ получается из первой строки $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$ заменой μ_l на μ_s. Последующий строки $RS(\mu_1, ..., \mu_s)$ образуют полустандартную $\mathbb{C}$-таблицу, которая равна $\mu_l \to (RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})')$, где $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})'$ — это $RS(\mu_1, ..., \mu_{s-1})$ с исключённой первой строкой.

Свойство 1. Длина первой строки $RS(\mu_1, ..., \mu_s)$ равна длине наибольшей строго убывающей подпоследовательности в $\mu_1, ..., \mu_s$.

Свойство 2. Длина первого столбца $RS(\mu_1, ..., \mu_s)$ равна длине наибольшей нестрого возрастающей подпоследовательности в $\mu_1, ..., \mu_s$.

Замечание 1. Общий принцип работы $RS(\cdot)$ можно сформулировать так: эта процедура переводит строго убывающие последовательности в себя, а все остальные последовательности переводит в набор строго убывающих подпоследовательностей, в соответствии с тем сколько (и каких) строго убывающих подпоследовательностей имеет исходная последовательность.

Список литературы

[Dix] J. Dixmier, Algebres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[BoBry] W. Borho, J.-L. Brylinski, *Differential operators on homogeneous spaces. III*, Invent. Math. **80**(1985), 1–68.

[Jo1] A. Joseph, *Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algébre enveloppante de sl(n+1, C)*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **287**, no 5 (1978), 303–306.

[Jo2] A. Joseph, *A characteristic variety for the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra*, Non-commutative harmonic analysis (Actes Colloq., Marseille-Luminy, 1976), Lecture Notes in Math., Vol. 587 , Springer, Berlin, 1977, 102–118.

[BV1] D. Barbasch, D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups*, Math. Ann. **259** (1982), 153–199.

[BV2] D. Barbasch, D. Vogan, *Primitive Ideals and Orbital Integrals in Complex Exceptional Groups*, Journ. Algebra **80** (1983), 350–382.

[BJ] W. Borho, J.-C. Jantzen, *Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfacher Lie-algebra*, Inv. Math. **39** (1977), 1–53.

[RS] https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson–Schensted-correspondence

[Knu] D. Knuth, The art of computer programming. Volume 3. Sorting and searching, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing, Addison-Wesley, 1973.