Лекция 5: Клетки

Фиксируем набор данных $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$; это задаёт также $\Delta, \Delta^+, \Delta^-, \Pi, (\cdot,\cdot), \rho, P^+$. Напомним, что всякому вектору $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ мы сопоставляем простой модуль $L(\lambda)$ с $\mathfrak{b}$-старшим весом λ. Положим

$$I(\lambda) := \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} L(\lambda).$$

Отображение $\lambda \to I(\lambda)$ бьёт из $\mathfrak{h}^*$ в $\mathrm{PrimU}(\mathfrak{g})$. Далее, для всякого $\lambda \in P^+$ определим отображение

$$\phi_\lambda : W \to \mathrm{PrimU}(\mathfrak{g}), \quad \phi_\lambda(w) = I(w(\lambda+\rho)-\rho).$$

Очевидно, что ϕ_λ это отображение из одного конечного множества в другое.

Теорема 1. Слои ϕ_λ не зависят от выбора $\lambda \in P^+$.

Доказательство. Будет обсуждаться на следующей лекции. □

Определение 1. Для любых $w_1, w_2 \in W$ положим
- $w_1 \sim_L w_2 \iff \phi_\lambda(w_1) = \phi_\lambda(w_2)$.
- $w_1 \sim_R w_2 \iff \phi_\lambda(w_1^{-1}) = \phi_\lambda(w_2^{-1})$.
- $w_1 \sim_{LR} w_2 \iff \exists n \exists w_1', ..., w_{2n}' : w_1' = w_1, w_n' = w_2, w_1' \sim_L w_2' \sim_R w_3' \sim_L ... \sim_L w_{2n}$.

Классы эквивалентности $\sim_L$ называются *левыми клетками* группы Вейля; $\sim_R$ — *правыми клетками* группы Вейля; $\sim_{LR}$ — *двухсторонними клетками* группы Вейля.

Замечание 1 (см. [BV1, BV2])**.** Очевидно, что левые клетки = классы эквивалентности $\sim_L$ = слои ϕ_λ. У отношения эквивалентности $\sim_R$ имеет следующее альтернативное описание:

$$w_1 \sim_R w_2 \iff \text{а) и б), где}$$

$$\text{а)} \exists \mu \in P^+ : L(w_1\rho - \rho) - \text{это подфактор} L(w_2\rho-\rho) \otimes V(\mu),$$
$$\text{б)} \exists \mu \in P^+ : L(w_2\rho - \rho) - \text{ это подфактор } L(w_1\rho-\rho) \otimes V(\mu).$$

Двухсторонние клетки отвечают за ассоциированные многообразия $I(w\rho - \rho)$.

Левые/правые/двухсторонние клетки соответствуют левым/правым/двухсторонним идеалам в правильно подобранной (сконструированной) алгебре. Построением этой алгебры мы сейчас и займёмся.

1.1. **Алгебра Гекке $H(W)$.** В этой подсекции мы определим алгебру Гекке $H(W)$; более детально эта тема разбирается в [BW]. Общая мысль в том, что алгебра Гекке $H(W)$ — это деформация групповой алгебры $\mathbb{C}[W]$. Напомню, что группа W порождена элементами $s_\alpha, \alpha \in \Pi$. На эти элементы есть следующие соотношения.

(1) $$s_\alpha^2 = 1 \forall \alpha \in \Pi, \quad (s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha\beta}} \forall \alpha, \beta \in \Pi,$$

где $m_{\alpha\beta}$ — это наименьшее целое число, для которого $\frac{m_{\alpha\beta}\angle(\alpha,\beta)}{\pi} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$; $\angle(\alpha,\beta)$ обозначает угол между α и β. Группа Вейля порождена элементами $s_\alpha, \alpha \in \Pi$, по модулю соотношений (1). Перепишем эти соотношения так:

(2) $$\begin{gathered} s_\alpha^2 = 1 \forall \alpha \in \Pi, \\ s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta ... (m_{\alpha\beta} \text{ отражений}) = s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha ... (m_{\alpha\beta} \text{ отражений}) \forall \alpha, \beta \in \Pi, \end{gathered}$$

Алгебра $H(W)$ определена над коммутативным кольцом $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ как свободная алгебра, порождённая элементами $T_w, w \in W$, и соотношениями

(3) $$\begin{gathered} T_\alpha^2 = (v^{-2}-1)T_\alpha + v^{-2} \forall \alpha \in \Pi, \\ T_\alpha T_\beta T_\alpha T_\beta ... (m_{\alpha\beta} \text{ отражений}) = T_\beta T_\alpha T_\beta T_\alpha ... (m_{\alpha\beta} \text{ отражений}) \forall \alpha, \beta \in \Pi. \end{gathered}$$

Можно понимать q, как параметр деформации, которому можно присваивать те или иные (ненулевые) значения.

Для всякой последовательности $\underline{\omega} = s_{\alpha_1}, ..., s_{\alpha_t} (\alpha_i \in \Pi)$ положим $T_{\underline{\omega}} := T_{\alpha_1} ... T_{\alpha_t}$.

Определение 2. Для всякого $w \in W$ обозначим через $l(w)$ минимальную длину последовательности, для которой существует $\underline{\omega}$ со свойством $w = s_{\alpha_1} ... s_{\alpha_t}$. Соответствующие последовательности $\underline{\omega}$ длины $l(w)$ назовём *приведёнными* или *приведёнными разложениями* w.

Свойство 1. Оказывается, что для всем приведённым разложениям ω элемента w соответствует один и тот же элемент T_ω; мы обозначим этот элемент T_w. Алгебра $H(W)$ свободно порождена элементами $T_w, w \in W$, как модуль над кольцом $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

1.2. **Базис Каждана-Люстига в Алгебре Гекке $H(W)$.** Зададим на алгебре $H(W)$ инволюцию σ формулами:

$$\sigma(T_\alpha) = T_\alpha^{-1}, \sigma(v) = v^{-1}.$$

Заметим, что из (3) следует, что

$$T_\alpha^{-1} = v^2 T_\alpha + (v^2 - 1).$$

Легко проверить, что $\sigma(vT_\alpha + v) = vT_\alpha + v$. Положим

$$H_w := v^{l(w)} T_w \forall w \in W, \quad \underline{H}_{s_\alpha} := vT_\alpha + v.$$

Теорема 2. Существует и единственный $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-базис $\{\underline{H}_w\}_{w \in W}$ алгебры $H(W)$, для которого
- $\sigma(\underline{H}_w) = \underline{H}_w \forall w \in W$,
- $\underline{H}_w = H_w + \sum\limits_{x<w} h_{x,w} H_x$,

где
- $x \in W, w < x \iff l(x) = l(w) + l(x^{-1}w)$ и $x \neq w$,
- $h_{x,w} \in v\mathbb{Z}[v]$.

Свойство 2. Все коэффициенты многочленов $h_{x,w}$ неотрицательны и любой многочлен $h \in v\mathbb{Z}_{\geq 0}[v]$ равен $h_{x,w}$ для какого-то $n \geq 1$ и каких-то $x, w \in S_n$.

1.3. **b-идеалы.** Назовём идеал I алгебры $H(W)$ *b-идеалом*, если существует $S \subset W$, для которого

$$I = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\{\underline{H}_w\}_{w \in S}.$$

Для каждого $w \in W$ обозначим через
- $I_L(w)$ наименьший левый b-идеал, содержащий $\underline{H}_w$,
- $I_R(w)$ наименьший правый b-идеал, содержащий $\underline{H}_w$,
- $I_{LR}(w)$ наименьший двухсторонний b-идеал, содержащий $\underline{H}_w$.

Теорема 3 ([LO, Секция 6]). 1) $w_1 \sim_L w_2 \iff I_L(w_1) = I_L(w_2)$,
2) $w_1 \sim_R w_2 \iff I_R(w_1) = I_L(w_2)$,
3) $w_1 \sim_{LR} w_2 \iff I_{LR}(w_1) = I_{LR}(w_2)$.

Замечание 2. Утверждение Теоремы 3 может быть усилено: клетки отвечают за совпадение идеалов, соответствующих элементам группы Вейля, а можно рассматривать так же включения между этими идеалами; они соответствуют включениям b-идеалов.

1.4. **Пример $\mathfrak{sl}(n)$.** В этой подсекции будет разобрано как устроена клеточная структура для группы S_n. Каждому $w \in S_n$ мы сопоставим последовательность чисел

$$\mathrm{seq}(w) = w(n), w(n-1), ..., w(1).$$

Далее, мы применяем алгоритм Робинсона-Шенстеда [RS] к последовательности $\mathrm{seq}(w)$ — в результате получается пара полустандартных таблиц Юнга $(Y_L(w), Y_R(w))$ одинаковой формы, заполненных числами от 1 до n. Заметим, что на самом деле это отображение задаёт биекцию между парами полустандартных таблиц одинаковой формы и элементами группы S_n, заполненных числами от 1 до n.

Теорема 4 ([Jo1]). а) $w_1 \sim_L w_2 \iff Y_L(w_1) = Y_L(w_2)$;
б) $w_1 \sim_R w_2 \iff Y_R(w_2) = Y_R(w_2)$;
в) $w_1 \sim_{LR} w_2 \iff$ формы диаграм $Y_L(w_1), Y_R(w_1), Y_L(w_2), Y_L(w_2)$ все одинаковы.

Из идущей выше теоремы легко видеть, что

а) левые/правые клетки S_n отождествляются с полустандартными таблицами Юнга с n коробочками, а двухсторонние клетки S_n отождествляются с разбиениями числа n,

б) примитивные идеалы вида $I_L(w\rho - \rho)$ могут быть отождествлены с полустандартными таблицами Юнга с n коробочками, заполненными числами от 1 до n.

Замечание 3. Таблицы $Y_L(w)$ и $Y_R(w)$ можно переставлять местами и это соответствует отображению $w \to w^{-1}$. Множество w, для которых эта перестановка тождественна, т.е. для которых $Y_L(w)$ переходит в $Y_R(w)$, совпадает с множеством инволюций группы S_n. Отсюда следует что отображение

$$\{\text{ инволюции группы } S_n \} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{примитивные идеалы} \\ \text{вида } I(w\rho - \rho) \end{array} \right\}, \quad w \to I(w\rho - \rho),$$

является биекцией. Аналогичное отображение является сюръекцией для любой полупростой алгебры и является биекцией при ограничении на множество специальных инволюций. В группе S_n все инволюции — специальны.

Замечание 4. Если $w_1 \sim_R w_2$, то ассоциированные многообразия модулей $L(w_1\rho - \rho)$ и $L(w_2\rho - \rho)$ совпадают и содержат $B(n \cap w^{-1}nw)$ в качестве неприводимой компоненты (это орбитальное многообразие задаётся диаграммой $Y_R(w)$ для $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(n)$). Это может объяснить мою точку зрения о том, что

$$\left\{ \begin{array}{c}\text{комбинаторика}\\ \text{орбитальных}\\ \text{многообразий}\end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c}\text{комбинаторики}\\ \text{категории } \mathcal{O}\end{array} \right\}.$$

Пример 1. Разбор всего про клетки для $\mathfrak{sl}(3)$ с указанием соответствующих старших весов был на лекции, но прямо сейчас рисовать соответствующую картинку мне влом.

Список литературы

[Dix] J. Dixmier, Algebres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[Jo1] A. Joseph, *Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algébre enveloppante de sl(n+1, C)*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **287**, no 5 (1978), 303–306.

[BV1] D. Barbasch, D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups*, Math. Ann. **259** (1982), 153–199.

[BV2] D. Barbasch, D. Vogan, *Primitive Ideals and Orbital Integrals in Complex Exceptional Groups*, Journ. Algebra **80** (1983), 350–382.

[RS] https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson–Schensted-correspondence

[BW] B. Elias, G. Williamson, *Sörgel Calculus*, https://arxiv.org/pdf/1309.0865.pdf

[LO] I. Losev, V. Ostrik, *Classification of finite dimensional irreducible modules over W-algebras*, arXiv:1202.6097.