Умножение в когомологиях

Задача 9.1. Докажите, что $H^*(\mathbb{R}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v]/(2v)$, $\deg v = 2$ и вычислите кольцо когомологий $\mathbb{R}P^n$.
Задача 9.2. Докажите изоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$, $\deg v_1 = \deg v_2 = 2$.

Ω-спектры и когомологии

В этом блоке задач излагается доказательство двух следующих утверждний: 1) *всякий* Ω*-спектр определяет приведённую теорию когомологий;* 2) *спектр Эйленберга-Маклейна определяет приведённые когомологии с коэффициентами в абелевой группе.*

Задача 9.3. а) Пусть X и K суть топологические пространства. Введите структуру группы на множестве $[\Sigma X, K]$ аналогичную структре группы на сфере.
б) Постройте естественный изоморфизм $[\Sigma X, K] \cong [X, \Omega K]$ и покажите, что структура группы из предыдущего пункта при изоморфизме переходит в структуру группы, индуцированную умножением петель.
в) Докажите, что $[X, \Omega^2(K)]$ является абелевой группой.

Пусть Ho$\mathcal{C}$ — категория классов гомотопически эквивалентных пунктированных CW-комплексов с классами гомотопных отображений сохраняющими отмеченную точку. *Приведённой теорией когомологий* на категории Ho$\mathcal{C}$ называется последовательность функторов h^n, $n \in \mathbb{Z}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию абелевых групп вместе с естественными изоморфизмами $h^n(X) \cong h^{n+1}(\Sigma X)$ для каждого CW-комплекса, причём для каждого h^n выполнены следующие аксиомы:

1. для любого корасслоения $A \to X$ в $Ho\mathcal{C}$ последовательность $h^n(X/A) \to h^n(X) \to h^n(A)$ точна;
2. для включений $i_\alpha \colon X_\alpha \to \vee_\alpha X_\alpha$ отображение произведения $\prod_\alpha i_\alpha^* \colon \prod_\alpha h^n(X_\alpha) \to h^n(\vee_\alpha X_\alpha)$ является изоморфизмом.

Задача 9.4. Пусть K — топологическое пространство.
а) Пусть $f \colon Y \to X$ — отображение CW-комплексов. Постройте отображение $f^* \colon [X, K] \to [Y, K]$ и покажите, что оно зависит только от гомотопического класса отображения f.
б) Покажите, что $f^* \colon [X, \Omega K] \to [Y, \Omega K]$ является гомоморфизмом групп.
в) Покажите, что $[X/A, K] \to [X, K] \to [A, K]$ — точная последовательность множеств с отмнеченным элементом для любой CW-пары (X, A).
г) Покажите, что имеет место биекция $[\vee_\alpha X_\alpha, K] \cong \prod_\alpha [X_\alpha, K]$, и что биекция превращается в изоморфизм (абелевых) групп при замене K на ΩK ($\Omega^2 K$).

Ω*-спектром* называется последовательность CW-комплексов K_n, $n \in Z$ вместе со (слабыми) гомотопическими эквивалентностями $K_n \to \Omega K_{n+1}$.

Задача 9.5. Докажите, что если $\{K_n\}$ — Ω-спектр, то соответствие $X \mapsto [X, K_n]$ определяет приведённую теорию когомологий.
Задача 9.6. Сформулируйте и докажите теорему единственности аналогичную теореме из Листка 4 для когомологий.
Задача 9.7. Покажите, что последовательность пространств[1] $K(G, 1), K(G, 2), \ldots$ является Ω-спектром.
Задача 9.8. а) Вычислив группы $[S^n, K(G, m)]$ и воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что имеют место естественные изоморфизмы $[X, K(G, n)] \cong \widetilde{H}^n(X; G)$.
б) Покажите, что этот изоморфизм задаётся соответствием $f \mapsto f^*(\alpha)$ для некоторого фиксированного класса $\alpha \in H^n(K(G, n), G)$.

[1] На отрицательные числа продолжим эту последовательность беря CW-аппроксимацию прострaств $\Omega^n K(G, 1)$.