

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 2.**  
**Гладкие многообразия. 10.09.2019.**

**Задача 1.** Пусть  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$  — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой  $t \mapsto t$ , а  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$  — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой  $t \mapsto t^3$ . Доказать, что  $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_3$ , но  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$  и  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$  диффеоморфны.

**Задача 2.** Множество  $k$ -плоскостей в векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  с естественной топологией называется многообразием Грассмана  $G_k(\mathbb{R}^n)$ . По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что  $G_k(\mathbb{R}^n)$  является гладким многообразием. Какова его размерность?

**Задача 3.** Множество ортонормированных  $k$ -реперов с началом в точке  $(0, \dots, 0)$  в  $\mathbb{R}^n$  с естественной топологией называется многообразием Штифеля  $V_k(\mathbb{R}^n)$ . Доказать, что это гладкое многообразие. Найти размерность.

**Задача 4.** Чему диффеоморфны  $V_1(\mathbb{R}^n)$  и  $V_n(\mathbb{R}^n)$ ?

**Задача 5.** Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

**Задача 6.** Ввести структуру комплексно-аналитического многообразия на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

**Задача 7.** Доказать, что как вещественное многообразие  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  диффеоморфно  $\mathbb{S}^2$ .

**Задача 8.** Доказать, что гладкое отображение  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  не может быть инъективным.

**Задача 9.** Может ли на ленте Мёбиуса существовать такая гладкая функция, что центральная окружность является регулярным прообразом некоторой точки?

**Задача 10\*.** Доказать, что если  $\psi : M \rightarrow N$  гладкое инъективное и сюръективное отображение, которое невырождено в каждой точке, то  $\psi$  — диффеоморфизм (Указание: без второй аксиомы счётности не обойтись).